Бойков И.В., Паксялева О.Г. Устойчивость некоторых моделей экономической динамики. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 36-40.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

И.В. Бойков, О.Г. Паксялева

Пензенский государственный университет,
Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза

В 1921 г. Хотеллинг предложил [1] модель роста человеческих популяций, объединяя логистический процесс во времени и миграционные процессы в пространстве.

Уравнение, предложенное Хотеллингом, имеет вид:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = A(s - p(t,x))\,p(t,x) + B\left(\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x_2^2}\right), \qquad (1)$$

где $p(t,x)$ – плотность популяции; A и B – постоянные, определяющие темпы роста популяции и ее распространения по ареалу.

В 1936-1937 гг. уравнение вида (1) было получено Р.А. Фишером [2] и А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским, Н. С. Пискуновым [3] при исследовании распространения гена по ареалу. При этом в [3] было показано, что при некоторых значениях параметров по ареалу пробегает волна.

В 1953 г. Скеллам, исследуя динамику распространения нечеловеческих популяций, возродил модель Хотеллинга, связывая миграционные процессы со случайным движением [4].

После этого наступил достаточно долгий период, в течение которого уравнение (1) не использовалось в работах по экологии и теоретической биологии. Но при этом уравнение (1) стало основным в работах по исследованию процессов горения и взрыва [5]. Позднее биология вновь вернулась к исследованию уравнений вида (1). Подробная библиография работ, выполненных в этом направлении, имеется в [6 ,7].

Наряду с экологией и биологией уравнение вида (1) играет существенную роль при исследовании экономических процессов. При этом [8] в это уравнение вводится производственная функция $q(p)$. В результате этого получено уравнение

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = p(t,x)(1 + q(p(t,x)) - \gamma p(t,x)) + \nabla\left(\frac{q(p(t,x))}{p(t,x)}\nabla p(t,x)\right), \qquad (2)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1} i + \frac{\partial}{\partial x_2} j)$.

Уравнение (2) исследовано в [8] в предположении, что $q = \alpha(\beta p^2 - p^3)$.

При этом уравнение (2) сводится к уравнению вида:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = p(t,x)(1 + a\cdot p(t,x) + b\cdot p(t,x) + c\cdot p^2(t,x) + d\cdot p^3(t,x)) + \\ +\nabla(f\cdot p(t,x) + g\cdot p^2(t,x))\nabla p(t,x), \qquad (3)$$

т.е. к уравнению с гладкими и ограниченными коэффициентами.

Устойчивость решений уравнений (1) и (3) с постоянными коэффициентами в одномерном случае исследована в [8]. Устойчивость решения уравнения

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = A(t)(s(t) - p(t,x))p(t,x) + B(t,x)\left(\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x_2^2}\right)$$

исследована в [9].

В данной работе исследуется устойчивость решения уравнения

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = p(t,x)(s(t,x) + q(p(t,x)) - \gamma(t,x)p(t,x)) + \\ +B(t,x)\nabla\left(\frac{q(p(t,x))}{p(t,x)}\nabla p(t,x)\right), \qquad (4)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $s(t,x)$, $\gamma(t,x)$, $B(t,x)$ непрерывны в ограниченной области G с границей $\Gamma = \partial\Omega$, при граничном условии

$$p(t,x)\big|_{x\in\Gamma} = p_0(x) \qquad (5)$$

и начальном условии

$$p(t_0,x) = p_1(x),\ x\in G. \qquad (6)$$

В уравнении (4) коэффициенты роста и диффузии зависят от времени и пространства.

На функцию $q(p(t,x))$ налагаем следующие условия: предполагается, что функция $q(u),\ u\in \mathrm{R}$ имеет непрерывные производные до второго порядка, и, кроме того, функции $\frac{q(u)}{u}$, $\frac{q(u)}{u^2}$, $\frac{q'(u)}{u}$ определены и непрерывны при всех значениях u, включая значение $u = 0$.

При этом функции $\frac{q(u)}{u}$, $\frac{q(u)}{u^2}$, $\frac{q'(u)}{u}$ могут принимать при $u = 0$ различные значения (необязательно равные нулю) в зависимости от конкретного экономического процесса.

Устойчивость решения задачи (4) – (6) можно исследовать в двух направлениях:

1) исследовать устойчивость стационарного решения;

2) исследовать устойчивость решения задачи (4) – (6) при возмущении граничных и начальных условий.

В данной работе ограничимся рассмотрением первой задачи.

Обозначим через $p^*(x)$ – стационарное решение уравнения (4) при граничном условии (5).

Введём функцию $u(t,x)$, определив её равенством $p(t,x) = p^* + u(t,x)$.

Тогда уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = u(t,x)(s(t,x) + q(p*(x) + u(t,x)) - \gamma(t,x)u(t,x) - \gamma(t,x)p*) +$$
$$+B(t,x)\nabla\left(\frac{q(p*(x) + u(t,x))}{p*(x) + u(t,x)}\nabla u(t,x)\right) +$$
$$+p^{*}((s(t,x) + q(p*(x) + u(t,x)) - \gamma(t,x)u(t,x) - \gamma(t,x)p*) -$$
$$-(s(t,x) + q(p*(x)) - \gamma(t,x)p*(x))) - B(t,x)\left(\frac{q(p*(x))}{p*(x)}\nabla p*(x)\right) \quad (7)$$

при граничных условиях

$$u(t_0,x)\big|_{x\in\Gamma} = 0. \quad (8)$$

Решением краевой задачи (7) – (8) при нулевом начальном условии является тождественный нуль.

Будем исследовать устойчивость краевой задачи (7) – (8) при возмущении начального условия:

$$u(t_0,x) = u_0(x), \quad x \in G. \quad (9)$$

Предварительно найдём функцию $p*(x)$. Так как представление решения уравнения

$$p(t_0,x)(s(t_0,x) + q(p(t_0,x)) - \gamma(t_0,x)p(t_0,x)) +$$
$$+B(t_0,x)\left(\frac{q(p(t_0,x))}{p(t_0,x)}\nabla p(t_0,x)\right) = 0 \quad (10)$$

в аналитическом виде невозможно, то для решения уравнения (10) применяем разностный метод. Для этого достаточно использовать пятиточечную разностную схему. После нахождения значений функции $p*(x)$ в узлах этой схемы переходим к исследованию уравнения (7). Аппроксимируя правую часть уравнения (7) пятиточечной разностной схемой на той же сетке, на которой решалась граничная задача (7) – (8), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A(t,X) \quad (11)$$

в R_n – мерном пространстве, где n – число внутренних узлов разностной схемы. Критерии устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений предложены в [10,11]. Пользуясь ими, находим условия устойчивости тривиального решения системы уравнений (7) – (8).

Решение модельных примеров для ряда частных случаев показало совпадение теоретических результатов с экспериментальными.

Библиографический список

1. Hotelling, H.A. Mathematical Theory of Migration, M A thesis presented at the University of Washington (1921); перепечатаны в 1978 г. в Environment and Planning. – 1978. – V. 10. – P. 1223 – 1239.

2. Fisher, R.A. The wave of advance of ougenics // Ann. Eugenics. – 1937. – № 7. – P. 355 – 369.

3. Колмогоров, А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А. Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюл. МГУ. Серия А. – 1937. – № 6. – С. 1 – 26.

4. Scellam, J.G. Random Dispersal in Theoretical Populations // Biometrika. – 1951. – V. 38. – P. 196 – 218.

5. Зельдович, Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе. – М.: Наука, 1980. – 478 с.

6. Свирежев, Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, – 1987. – 368 с.

7. Свирежев, Ю.М. Устойчивость биологических сообществ / Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет. – М. : Наука, 1978. – 352 с.

8. Пу, Т. Нелинейная экономическая динамика / Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика». – Ижевск: Издательский дом «Удмурдский университет», 2000. – 200 с.

9. Бойков, И.В. Критерии устойчивости экологических, экономических и демографических моделей // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – Пенза: ИИЦ ПГУ, 2003 (5). – № 2. – С. 18 – 30.

10. Бойков, И.В. Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений // ДАН СССР. – 1990. – Т. 314, – № 6. – С. 1298 – 1300.

11. Бойков, И.В. Об одном способе построения областей устойчивости систем автоматического регулирования // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1993. – № 2. – С. 20 – 25.