Белов Ю.А. Замечание о бисимуляциях и автоморфизмах систем переходов. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 40-42.

ЗАМЕЧАНИЕ О БИСИМУЛЯЦИЯХ И АВТОМОРФИЗМАХ СИСТЕМ ПЕРЕХОДОВ

Ю.А. Белов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль

1. Определения

Система помеченных переходов (labeled transition system LTS – [1]) – это тройка D = <S, L, T>, где S – произвольное бесконечное множество, называемое множеством состояний; L – конечное множество меток (имён, или действий) переходов; $T \subseteq S \times L \times S$ – множество переходов. Элементы из T записываются в следующем виде: $s \xrightarrow{l} s'$, если $(s, l, s') \in T$ и читаются так: система D из состояния s под действием перехода с именем l перешла в состояние s'.

Различные виды сетей Петри (обыкновенные, раскрашенные, многоуровневые и другие) являются примерами систем переходов.

Понятие бисимуляции (то есть возможности взаимного моделирования поведения двух систем) определяется следующим образом. Пусть имеются две системы – $D = <S_1, L, T_1>$ и $H = <S_2, L, T_2>$ с одинаковым множеством L имён переходов. Бинарное отношение $R \subseteq S_1 \times S_2$ называется отношением бисимуляции, если для любой пары $(s, q) \in R$ из того, что $s \xrightarrow{l} s'$, в D следует, что в H существует переход с той же меткой l вида $q \xrightarrow{l} q'$ и при этом $(s', q') \in R$ (свойство переноса). Аналогичное свойство переноса в обратном направлении: если $q \xrightarrow{l} q'$ в H, то в D найдётся переход $s \xrightarrow{l} s'$ с той же меткой, при котором $(s', q') \in R$.

При исследовании системы переходов D обычно задаётся некоторое начальное состояние $s_0 \in S$ и изучается пара (D, s_0). Две системы $D = <S_1, L, T_1>$ и $H = <S_2, L, T_2>$ с одинаковым множеством L имён переходов называются бисимулярными при начальных состояниях $s_{01} \in S_1$ и $s_{02} \in S_2$, если существует такое отношение бисимуляции R, что $(s_{01}, s_{02}) \in R$. Это будет обозначаться так: $(D, s_{01}) \cong (H, s_{02})$. В частности, состояния s_1 и s_2 одной системы D будем называть бисимулярными, если $(D, s_1) \cong (D, s_2)$. Короче это будем обозначать $s_1 \cong s_2$, если ясно, о какой системе идёт речь. Наибольшее отношение бисимулярности (объединение всех отношений бисимуляции) на множестве состояний одной системы является отношением эквивалентности.

Приведённые выше определения являются стандартными для систем переходов – [1, 2]. Следующие ниже определения являются достаточно новыми [5].

LTS – система $D=<S_1, L, T_1>$ называется изоморфной системе $H = <S_2, L, T_2>$, если существует биективное отображение $\alpha : S_1 \to S_2$, такое, что $\forall$ s, $s' \in S_1$ $s \xrightarrow{l} s'$ тогда и только тогда, когда $\alpha(s) \xrightarrow{l} \alpha(s')$ в S_2. Другими словами, изоморфизм систем означает, что две системы структурно идентичны и различаются лишь обозначениями множеств состояний и переходов.

Автоморфизмом системы называется изоморфное отображение системы на себя.

Изучение автоморфизмов произвольных алгебраических структур – классическое направление в алгебре [4]. Как отмечалось, например, в [3], автоморфизмы графа описывают его симметрии.

2. Результат

Сначала очевидное, но необходимое замечание.

Множество всех автоморфизмов данной системы переходов D является группой относительно суперпозиции $\circ$ (т.е. последовательного выполнения автоморфизмов: $(\alpha \circ \beta)(x) = \beta(\alpha(x))$, $x \in S$). Это подгруппа полной симметрической группы на множестве S. Будем обозначать её Aut(D).

Бисимуляция является тонкой эквивалентностью на множестве состояний, отражающей свойства системы в семантике ветвящегося времени. Однако для большинства систем с бесконечным числом состояний бисимуляция неразрешима, т.е. не существует алгоритма, распознающего, бисимулярны ли два данных состояния – подробности и точные ссылки в [2]. Поэтому некоторый интерес может представлять метод получения определённых семейств отношений бисимуляции с помощью автоморфизмов системы.

Предложение.

1. Любому автоморфизму $\alpha \in \mathrm{Aut(D)}$ соответствует отношение бисимуляции $R_\alpha = \{(s, \alpha(s)), s \in S\}$. При этом произведению $\alpha \circ \beta$ автоморфизмов группы соответствует суперпозиция бисимуляций $R_\alpha \circ R_\beta$, обратному элементу α^{-1} – обратное отношение $(R_\alpha)^{-1}$.

2. Любой автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut(D)}$ порождает биективное отображение множества всех отношений бисимуляции на себя по правилу $R \xrightarrow{\alpha} \alpha(R) = \{(\alpha(x), \alpha(y)), (x, y) \in R\}$.

Конечно, описание всех автоморфизмов системы является в большинстве случаев нетривиальной задачей. Это значит, что в приведённом утверждении один сложный объект предлагается заменить другим сложным объектом изучения. Однако для некоторых систем это замечание бывает полезным.

Библиографический список

1. Кузьмин, Е.В., Соколов, В.А. Структурированные системы переходов. – М.: Физматлит, 2006. – 176 с.

2. Башкин, В.А., Ломазова, И.А. Эквивалентность ресурсов в сетях Петри. – М.: Научный мир, 2008. – 206 с.

3. Емеличев, В.А., Мельников, О.И., Сарванов, В.И., Тышкевич, В.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 382 с.

4. Плоткин, Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. – М.: Наука, 1966. –603 с.

5. Белов, Ю.А. Автоморфизмы систем переходов //Моделирование и анализ информационных систем. – Т. 14. – 2007. – №1. – С. 53 – 55.