Кучумов Е.В. О возможности применения многомерной матричной алгебры к численному решению многомерных линейных интегральных уравнений Фредгольма. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 42-48.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

Е.В. Кучумов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза

Рассмотрим двухмерное линейное интегральное уравнение Фредгольма I рода вида

$$\int_0^1\int_0^1 h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2),\ t=(t_1,t_2)\in[0,1]^2 . \tag{1}$$

Далее будем полагать, что двухмерное линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма II рода можно с помощью двухмерной δ-функции Дирака свести к уравнению вида (1).

Разобьём носитель (интервал) каждой переменной на одинаковое число подсегментов и применим к уравнению (1) метод механических квадратур [1]. В результате получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} R_{ijkl}x_{kl} = f_{ij},\ i,j=1,\dots,n, \tag{2}$$

где $R_{ijkl} = p_{kl}h(t_{1i},t_{2j},\tau_{1k},\tau_{2l})$; p_{kl} – кубатурный множитель, зависящий от метода приближения данного интеграла конечной суммой, такой, что $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{kl} = 1$; $x_{kl} = x(\tau_{1k},\tau_{2l})$ и $f_{ij} = f(t_{1i},t_{2j})$.

Рассмотрим уравнения (2) с позиции матричной алгебры и введем соглашение, аналогичное соглашению о суммировании по дважды повторяющемуся индексу А.Эйнштейна из тензорной алгебры [2].

Таким образом, систему уравнений (2) можно записать в виде:

$$R_{ijkl}x_{kl} = f_{ij},\ i,j,k,l=1,\dots,n, \tag{3}$$

где $\|R_{ijkl}\|$ рассматривается как четырёхмерная матрица n-го порядка, а $\|x_{kl}\|$ и $\|f_{ij}\|$ – как классические двумерные матрицы n-го порядка. Общую теорию многомерных матриц можно найти в работах [3,4].

Рассматривая уравнение (3) как многомерное матричное уравнение, мы можем попытаться решить его матричным способом с помощью обратной матрицы. Предположим, что правая обратная матрица R^{-1} для четырехмерной матрицы $\|R_{ijkl}\|$

существует. Тогда она, безусловно, должна удовлетворять следующему матричному уравнению [4, с. 85 – 89]:

$$ {}^{\lambda,\mu}\left(RR^{-1}\right) = \sum_{c^{\mu}} R_{lsc} R^{-1}_{csm} = E(\lambda', \mu') . \qquad (4) $$

Здесь символом ${}^{\lambda,\mu}\left(\ldots\right)$ обозначается свёртка поэлементного произведения матриц RR^{-1} (в этом произведении подразумевается, что индексы у каждой многомерной матрицы имеют независимый характер, так же, как и в тензорном произведении) по μ индексам (*кэлиевым* индексам), относящимся к мультииндексу $c^{\mu} = (c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_{\mu})$, с λ связывающими индексами (*скоттовыми* индексами) мультииндекса s^{λ}, т.е. теми индексами, которые становятся общими после данного произведения со свёрткой, мультииндексы l^{χ} и m^{ν} непричастны к свёртыванию и называются *свободными*; $E(\lambda', \mu')$ – единичная матрица размерности $p' = \lambda' + 2\mu'$ n-го порядка, полученная с помощью решения уравнения ${}^{\lambda',\mu'}\left(AE\right) = A$, где матрица A с размерностью $p \geq p'$ не является нулевой, и удовлетворяющая условиям ${}^{\lambda',\mu'}\left(RE\right) = {}^{\lambda',\mu'}\left(ER\right) = R$, ${}^{\lambda',\mu'}\left(R^{-1}E\right) = {}^{\lambda',\mu'}\left(ER^{-1}\right) = R^{-1}$. Действительно, для исходной матрицы R это условие выводится из следующей цепочки тождеств:

$$ {}^{\lambda',\mu'}\left(E(\lambda', \mu')\,{}^{\lambda,\mu}\left(RR^{-1}\right)\right) = {}^{\lambda,\mu}\left({}^{\lambda',\mu'}\left(E(\lambda', \mu')R\right)R^{-1}\right) = $$

$$ = {}^{\lambda',\mu'}\left(E(\lambda', \mu')E(\lambda', \mu')\right) = E(\lambda', \mu') = {}^{\lambda,\mu}\left(RR^{-1}\right). $$

Доказательство цепочки равенств основывается на свойстве ассоциативности (λ, μ)-свернутого произведения матриц (вообще на свойство ассоциативности (λ, μ)-свернутого произведения многомерных матриц одного и того же порядка накладывается ряд условий [4, с. 57], но в нашем случае они являются очевидными и предполагаются заранее удовлетворёнными), а также на свойстве единичной многомерной матрицы ${}^{\lambda,\mu}\left(EE\right) = E(\lambda, \mu)$ (в [3,4] данного свойства нет, но его доказательство тривиально). Аналогично доказывается условие для обратной матрицы R^{-1}.

В общем случае $\lambda \neq \lambda'$, $\mu \neq \mu'$ и $0 \leq \lambda' + \mu' \leq p$, где p – максимальная размерность матриц, участвующие в произведении. Для нас же является важным случай, когда $\lambda = \lambda'$ и $\mu = \mu'$. Именно при этом условии выполняется решение уравнения (3).

Рассмотрим данный вопрос более подробно. Умножим уравнение (3) слева на левую обратную матрицу $\left\| R^{-1}_{k'l'ij} \right\|$:

$$ R^{-1}_{k'l'ij} R_{ijkl} x_{kl} = {}^{0,2}\left(R^{-1}R\right) x_{kl} = E_{k'l'kl} x_{kl} = {}^{0,2}\left(Ex\right) = x_{k'l'} = R^{-1}_{k'l'ij} f_{ij} . \qquad (5) $$

С другой стороны, с помощью правой обратной матрицы можно получить следующее равенство:

$$f_{ij} = {}^{0,2}\left(Ef\right) = E_{iji'j'} f_{i'j'} = {}^{0,2}\left(RR^{-1}\right) f_{i'j'} = R_{ijkl} R^{-1}_{kli'j'} f_{i'j'} = R_{ijkl} x_{kl}\,. \qquad (6)$$

Сравнивая уравнения (5) и (6), убеждаемся в необходимости выполнения условия $\lambda = \lambda' = 0$ и $\mu = \mu' = 2$. Действительно, именно при этом условии единичные матрицы в (5) и (6) имеют один и тот же вид, а следовательно, левая обратная матрица и правая обратная матрица совпадают, т.е. ${}^{\lambda,\mu}\left(RR^{-1}\right) = {}^{\lambda,\mu}\left(R^{-1}R\right) = E(\lambda,\mu)$. В этом случае матрицу $R^{-1}(\lambda,\mu)$ называют (λ,μ) – обратной матрицей для R.

Вообще число (λ,μ)-обратных матриц не единственно, а именно, равно числу пар значений (λ,μ), удовлетворяющих равенству $\lambda + 2\mu = p$, т.е. равно $1+\left[\frac{p}{2}\right]$ [4, с. 87]. В случае уравнения (3) имеет место только одна пара, а именно, $(0,2)$, и, следовательно, единичной матрицей для нахождения (λ,μ)-обратной матрицы R^{-1} должна быть матрица $E(0,2)$. Действительно, возьмем единичную матрицу $E(4,0)$, которой соответствует $(4,0)$-свернутое произведение ${}^{4,0}\left(R^{-1}R\right) = E(4,0)$. Но в этом случае мы не сможем получить $(4,0)$-свернутое произведение для ${}^{4,0}\left(E(4,0)x\right)$, потому что в нём участвуют 4 скоттовых индекса, а у x_{kl} всего два индекса. Аналогичное противоречие с уравнением (3) возникает, если для получения обратной матрицы взять единичную матрицу $E(2,1)$.

Теперь рассмотрим алгоритм нахождения $(0,2)$-обратной матрицы на примере четырехмерной матрицы второго порядка

$$R = \left\| R_{ijkl} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{array}{|cc|} R_{1111} & R_{1112} \\ R_{1121} & R_{1122} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|cc|} R_{1211} & R_{1212} \\ R_{1221} & R_{1222} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline R_{2111} & R_{2112} \\ R_{2121} & R_{2122} \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline R_{2211} & R_{2212} \\ R_{2221} & R_{2222} \end{array} \end{array} \right\| \begin{array}{c} \overset{j,l}{\rightarrow} \\ \overset{i,k}{\downarrow} \end{array}. \qquad (7)$$

Форма записи многомерной матрицы R в виде (7) называется представлением с помощью сечений (i,j) и является по существу проекцией четырехмерной матрицы на двумерную плоскость (двумерную матрицу). С помощью данной формы записи можно любую многомерную матрицу n-го порядка представить в виде двумерной матрицы. В представлении (7) над стрелочками первый индекс считается внешним (нумерует, т.е. ориентирует внешнее сечение), второй и последующие – внутренними (ориентирует внутреннее сечение, если он не последний, и ориентирует строку внутреннего сечения, если он последний) [3-4, гл. I].

Запишем теперь единичную матрицу $E(0,2)$ 2-го порядка для уравнения (4) ${}^{0,2}\left(RR^{-1}\right) = E(0,2)$ в виде, принятом в [4, с. 82 – 84]:

$$E(0,2)=\left\|\begin{array}{cc}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{array}\right\|\begin{array}{c}\overset{j,l}{\rightarrow}\\ \overset{i,k}{\downarrow}\end{array}.$$

Для нахождения элементов обратной матрицы R^{-1} нужно решить систему линейных уравнений (4):

$$R_{ij\alpha\beta}R^{-1}_{\alpha\beta kl}=E_{ijkl}(0,2),\ \alpha=1,2,\ \beta=1,2. \tag{8}$$

Порядок расположения уравнений (8), т.е. индексов i,j,k,l, может быть произвольным. Постараемся сделать это наиболее простым и в то же время эффективным образом. Для этого перепишем форму представления (7) в виде:

$$E(0,2)=\left\|\begin{array}{c|c|c|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right\|\begin{array}{c}\overset{i,j}{\rightarrow}\\ \overset{k,l}{\downarrow}\end{array}. \tag{9}$$

Теперь, если расставить все индексы попарно в системе (8) аналогично форме (9), т.е. в виде (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), уравнение (8) можно представить в привычном матричном виде:

$$\left\|\begin{array}{c|c|c|c}R_{1111}&R_{1211}&R_{2111}&R_{2211}\\R_{1112}&R_{1212}&R_{2112}&R_{2212}\\R_{1121}&R_{1221}&R_{2121}&R_{2221}\\R_{1122}&R_{1222}&R_{2122}&R_{2222}\end{array}\right\|\begin{array}{c}\overset{i,j}{\rightarrow}\\ \overset{\alpha,\beta}{\downarrow}\end{array}\cdot\left\|\begin{array}{c|c|c|c}R^{-1}_{1111}&R^{-1}_{1211}&R^{-1}_{2111}&R^{-1}_{2211}\\R^{-1}_{1112}&R^{-1}_{1212}&R^{-1}_{2112}&R^{-1}_{2212}\\R^{-1}_{1121}&R^{-1}_{1221}&R^{-1}_{2121}&R^{-1}_{2221}\\R^{-1}_{1122}&R^{-1}_{1222}&R^{-1}_{2122}&R^{-1}_{2222}\end{array}\right\|\begin{array}{c}\overset{\alpha,\beta}{\rightarrow}\\ \overset{k,l}{\downarrow}\end{array}=\left\|\begin{array}{c|c|c|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right\|\begin{array}{c}\overset{i,j}{\rightarrow}\\ \overset{k,l}{\downarrow}\end{array}. \tag{10}$$

Решая многомерное матричное уравнение (10) с помощью классической теории двумерных определителей (метод Крамера) или с помощью метода Гаусса, получим (0,2)-обратную матрицу R^{-1}. Данная методика напоминает метод решения уравнения (3) с помощью развертки в двухмерную матрицу, т.е. данной четырёхмерной матрице n-го порядка мы инициируем соответствующую двумерную матрицу порядка n^2.

На самом деле, форма записи (10) для матричного уравнения (3) не ограничивается только матричными уравнениями с 4-мерными матрицами и является универсальной в случае, если матрицы имеют один и тот же порядок n, т.е. заключается в гиперкубе индексов n^p и имеет четную размерность $p\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\geq 0$. Например, в случае $p=2$ в соответствии с формой (10) 2-мерную матрицу можно представить в виде вектора векторов, т.е.

$$A=\left\|a_{ij}\right\|=\left\|\begin{array}{c|c|c}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{array}\right\|.$$

В этом случае, вводя умножения вектора на скаляр и скалярное произведение векторов, мы можем построить обратную матрицу, оставаясь в формализме векторного пространства. Аналогично можно поступить в случае 6-мерных матриц.

Для этого опять же возьмём единичную матрицу $E(0,3)$ 2-го порядка в форме [4, с. 84].

$$E(0,3)=\left\|E_{ijklmv}\right\|=\begin{Vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&0\\1&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&0\\1&0\end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix}} \end{Vmatrix} \begin{matrix}\xrightarrow{j,l,v}\\ \overset{i,k,m}{\downarrow}\end{matrix}$$

и переставим в ней индексы для получения формы (10) по следующему правилу: (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2). Данная перестановка приведёт нас к форме (10) для 6-мерных матриц:

$$E(0,3)=\left\|E_{ijklmv}\right\|=\begin{Vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}} \end{Vmatrix} \begin{matrix}\xrightarrow{i,j,k}\\ \overset{l,m,v}{\downarrow}\end{matrix}.$$

Обобщая полученный результат на уравнения типа (3)

$$R_{sc}x_c = f_s,\ s^{p/2}=(s_1\times s_2\times\cdots\times s_{p/2}),\ c^{p/2}=(c_1\times c_2\times\cdots\times c_{p/2}) \qquad (11)$$

с невырожденной матрицей R, n-го порядка и размерности $p\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\geq 0$, приходим к заключению, что каждому p-мерному матричному уравнению вида

$$^{(0,p/2)}(RR^{-1})=E(0,p/2)$$

можно инициировать двумерное матричное уравнение, построенное по форме, аналогичной (10), решением которого будет являться обратная матрица R^{-1} для исходного уравнения (11).

Библиографический список

1. Бойков, И.В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений: монография. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. – 316 с.

2. Акивис, М.А., Гольдберг, В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 352 с.

3. Соколов, Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. – М.: Физматлит, 1960. – 301 с.

4. Соколов, Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972.