Яремко О.Э. Прямые и обратные краевые задачи для круга и шара. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 48-51.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГА И ШАРА

О.Э. Яремко

Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза

Пусть B_n – единичный, кусочно-однородный шар из R^N:

$$B_n = S_0 \times I_n^+; \quad I_n^+ = \left\{ r : r \in \overset{n+1}{\underset{j=1}{U}} \left(r_j, r_{j-1} \right); 0 < r_0 \le 1,\ r_{n+1} = 0, r_{j+1} < r_j,\ j = 1,\dots,n \right\},$$

$$S_0 = \left\{ \eta = \left(\eta_1,\dots,\eta_N \right) : \eta^2 = 1 \right\}.$$

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве B_n решения системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\Delta u_k = 0, x \in V_k; k = \ ,\dots,n; \tag{1}$$

по краевым условиям

$$\Gamma_0 \left[u_1 \right] = f_0(\eta), \eta \in S_0 \tag{2}$$

и условиям однородного контакта на гиперповерхностях сопряжения S_k:

$$\Gamma_{j1}^k \left[u_k \right] - \Gamma_{j2}^k \left[u_{k+1} \right] = 0 ; \eta \in S_k ; k = 1,\dots,n,\ j = 1,2, \tag{3}$$

$$S_k = \left\{ \eta = \left(\eta_1,\dots,\eta_N \right) : \eta^2 = r_k^2 \right\},$$

где $\mathit{\Gamma}_0, \mathit{\Gamma}_{j1}^k, \mathit{\Gamma}_{j2}^k - \left(j = 1,2; k = 1,\dots,n \right)$ – некоторые операторы, перестановочные с оператором $\sum_{i=1}^N x_i \dfrac{d}{dx_i}$.

Рассмотрим модельную задачу Дирихле в единичном шаре B_0:

$$\Delta \hat{u}_0 = 0,\ x \in B_0,\ B_0 = \left\{ x \in R^N : \| x \|^2 < 1 \right\},$$

$$\hat{u}_0 = f_0(\eta),\ \eta \in S_0.$$

Если функция $f_0(\eta)$ непрерывна на сфере, то решение указанной задачи существует единственно и находится по формуле Пуассона для шара. В работе [1] получена основная формула $u = P_0\left[\hat{u}_0 \right]$, в которой P_0 – оператор преобразования, действующий по правилу

$$P_0 : \hat{u}_0 \to u_0,\ u_0(r,\eta) = \sum_{k=1}^{n+1} \chi\left(V_k \right) u_{0\,k}(r,\eta),$$

$$u_{0\,j}(r,\eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l + N/2 - 1}{N/2 - 1} H_{j,1,l}^*\left(r, r_0 \right) r_0^{N-1} r^{-l} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_{S_0} C_l^{N/2-1}\left(\langle \eta, \xi \rangle \right) \hat{u}_0(r,\eta) dS_0.$$

Определим граничный оператор преобразования $\Gamma_0 : \hat{u}_0 \to u_{00}$:

$$u_{00}(x,y)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+N/2-1}{N/2-1}\,r_0^{N-1}\Omega_{1l}^{-1}(r_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left(\int_{S_0}C_l^{N/2-1}(\langle\eta,\xi\rangle)\,\hat{u}_0(r,\eta)dS_0\right).$$

Определим оператор преобразования $P_k : u_{0k-1}\to u_{0k},\quad k=1,...,n$ относительно поверхности S_k:

$$u_{0j}(r,\eta)=\sum_{l=0}^{\infty}H_{j,1,l}^{*}(r,r_0)\,r^{-l}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\int_{S_0}C_l^{N/2-1}(\langle\eta,\xi\rangle)\,u_{0k-1}(r,\eta)dS_0\,.$$

Таким образом, проведена факторизация оператора преобразования из [1]:

$P_0=P_n\cdot\ldots\cdot P_1\cdot\Gamma_0[\hat{u}]$.

Обратная задача Дирихле для единичного круга состоит в определении функции гармонической в круге B $,B=\left\{(x,y): x^2+y^2<1\right\}$ по ее значениям на внутренней окружности $\left\{(x,y): x^2+y^2=r_0^2\right\}$. Как известно [2], указанная задача имеет, и при том единственное, решение, которое, однако, неустойчиво. Приведем формулу, которая дает это решение в явном виде:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\lambda}\left(\int_0^{2\pi}\left(2e^{\frac{r}{r_0}\lambda\cos(\varphi-\psi)}cos\left(\frac{r}{r_0}\lambda\sin(\varphi-\psi)\right)-1\right)u(r_0,\psi)d\psi\right)d\lambda\,. \qquad (4)$$

Формула (1) получена И.И. Бавриным в [2]. Пользуясь его методом, мы получаем аналогичную формулу для *n*-мерного шара:

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{\infty}e^{-\lambda}\left(\lambda-\frac{n-2}{2}\right)\lambda^{\frac{n-3}{2}}\int_{S(r_0)}e^{\frac{r}{r_0}\lambda\cos\psi}\frac{J_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{r}{r_0}\lambda\sin\psi\right)}{\left(\frac{r}{r_0}\lambda\sin\psi\right)^{\frac{n-3}{2}}}u(\xi)dS_{\xi}\cdot d\lambda\,. \qquad (5)$$

Замечание. Формулы (4) – (5) задают также продолжение функции u на границу круга, шара соответственно, т.е. решают обратную задачу Дирихле.

Оператор продолжения будем обозначать Π , $\Pi: u(\xi)\to u(x)$.

Обратная краевая задача состоит в определении решения задачи (1) – (3) вплоть до границы S_0 по известным значениям $u(\xi)$. Будем считать, что $r_{k-1}<\rho<r_k$ и $k=1,...,n+1$ – фиксированное. Из определения операторов преобразования и оператора продолжения следует формула

$$u_j=P_j\cdot P_{j+1}\cdot\ldots P_n\cdot\Gamma_{\rho}\left[\Pi(\hat{u})\right], \qquad (6)$$

где Γ_{ρ} – граничный оператор преобразования:

$$\Gamma_r[v]=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+N/2-1}{N/2-1}\,\rho^{N-1}\Omega_{kl}^{-1}(\rho)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left(\int_{S(\rho)}C_l^{N/2-1}(\langle\eta,\xi\rangle)\cdot v(r,\eta)dS(\rho)\right),$$

$$\hat{u}=P\left[u(\xi)\right],$$

P – интеграл Пуассона для шара $\left\{x:|x|^2<\rho^2\right\}$.

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного на множестве B_1 решения системы уравнений Лапласа с постоянными коэффициентами

$$\Delta u_1 = 0, x \in V_1, \quad \Delta u_2 = 0, x \in V_2$$

по идеальными условиями сопряжения на гиперповерхности сопряжения S_1:

$$u_1 = u_2 \,; \eta \in S_1 \,, \quad k\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}, \eta \in S_1,$$

по известным значениям $u_2(\xi)$ на гиперсфере $S = \{\, \eta = (\eta_1, ..., \eta_n) : \eta^2 = \rho^2 \,\}$, $0 < \rho < r_1$. Из формулы (5) получаем:

$$u_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\lambda} \left(\lambda - \frac{n-2}{2} \right) \lambda^{\frac{n-3}{2}} \int_{S(\rho)} \left(\frac{k+1}{2k} e^{\frac{r}{\rho}\lambda\cos\psi} \frac{J_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{r}{\rho}\lambda\sin\psi \right)}{\left(\frac{r}{\rho}\lambda\sin\psi \right)^{\frac{n-3}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{k-1}{2k} e^{\frac{r_1^2}{\rho r}\lambda\cos\psi} \frac{J_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{r_1^2}{\rho r}\lambda\sin\psi \right)}{\left(\frac{r_1^2}{\rho r}\lambda\sin\psi \right)^{\frac{n-3}{2}}} \right) u_2(\xi) dS_\xi \cdot d\lambda,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\lambda} \left(\lambda - \frac{n-2}{2} \right) \lambda^{\frac{n-3}{2}} \int_{S(\rho)} e^{\frac{r}{\rho}\lambda\cos\psi} \frac{J_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{r}{\rho}\lambda\sin\psi \right)}{\left(\frac{r}{\rho}\lambda\sin\psi \right)^{\frac{n-3}{2}}} u_2(\xi) dS_\xi \cdot d\lambda,$$

если известны значениям $u_1(\xi)$ на гиперсфере $S = \{\, \eta = (\eta_1, ..., \eta_n) : \eta^2 = \rho^2 \,\}$, $r_1 < \rho < r_0$, то формула для решения обратной задачи имеет тот же самый вид, с заменой $u_2(\xi)$ на $v(\xi)$, где $v(\xi)$ – решение прямой задачи Дирихле в области $\left\{ x \in B_n : |x|^2 < \rho^2 \right\}$.

Библиографический список

1. Баврин, И.И., Яремко, О.Э. Дифференциальные уравнения // Журнал РАН. – М., 2004. – Т. 40. – №8. – С. 1085 – 1095.

2. Баврин, И.И. Операторный метод в комплексном анализе. – М.: Прометей, 1991. – 200 с.