Галимов Р.Р., Аралбаев Т.З. Алгоритмы выравнивания нагрузки в вычислительных системах с кольцевой и разомкнутой архитектурой. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 55-58.

АЛГОРИТМЫ ВЫРАВНИВАНИЯ НАГРУЗКИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С КОЛЬЦЕВОЙ И РАЗОМКНУТОЙ АРХИТЕКТУРОЙ

Р.Р. Галимов, Т.З. Аралбаев

Оренбургский государственный университет,
г. Оренбург

Основным фактором, определяющим эффективность разработки и эксплуатации сложных распределенных вычислительных систем (РВС), является использование автоматизированных инструментальных средств, позволяющих определять оптимальные режимы вычислительных устройств на этапе их разработки и оперативно устранять дисбаланс нагрузки подсистем в процессе эксплуатации систем.

В настоящей работе представлены результаты разработки алгоритмов выравнивания нагрузки подсистем РВС при ее дисбалансе.

Следует отметить, что известные решения по данному вопросу, представленные, в частности, в работах [1,2], в основном базируются на использовании централизованного управления режимами загрузки подсистем, что в условиях распределенных систем не всегда эффективно из-за удаленности подсистем от средств управления и дополнительных затрат на эти средства. Особенностью представленных в настоящей работе алгоритмов является то, что они позволяют ликвидировать дисбаланс нагрузки без управляющих органов на основе самоорганизации подсистем РВС с кольцевой и разомкнутой архитектурой. Данные алгоритмы базируются на последовательном усреднении нагрузки соседних подсистем, находящихся в зоне взаимной видимости, посредством доступных каналов связи. В основе разработанных алгоритмов лежит следующая теорема и ее следствия.

Теорема: Если в последовательности $\boldsymbol{R_1}$, состоящей из произвольного числа $\boldsymbol{N}$ произвольных неравных действительных чисел $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, … $\boldsymbol{x_N}$, поочередно заменять рядом стоящие пары чисел их средними значениями в соответствии со следующими выражениями:

$$x_1^1 = x_2^1 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ x_2^2 = x_3^2 = \frac{x_2^1 + x_3}{2},\ \ x_{N-1}^{N-1} = x_N^{N-1} = \frac{x_{N-1}^{N-2} + x_N}{2}, \qquad (1)$$

где верхний индекс числа соответствует номеру замены $\boldsymbol{M}$, то при числе замен $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$, оценка дисперсии значений чисел $\boldsymbol{\sigma^2} \to 0$.

Доказательство: Известно, что

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}.$$

Предположим, что среднее значение N чисел цепи $\overline{x}=0$.

При замене в исходной последовательности R_1 двух последовательно расположенных чисел, например, x_1 и x_2, их средними значениями среднее значение $\overline{x}$ не изменится, поскольку сумма чисел x_1 и x_2 и количество чисел в последовательности не изменятся. При этом оценка дисперсии $\sigma^2(R_2)$ для новой последовательности чисел после первой замены по отношению к оценке дисперсии исходной последовательности $\sigma^2(R_1)$ до замены уменьшится. Это видно из следующих рассуждений. Обозначим для удобства изложения $A=x_1$, $B=x_2$.

В соответствии с принятой гипотезой

$$\sigma^2(R_1)=\frac{A^2}{N}+\frac{B^2}{N}+\frac{\sum_{i=3}^{N}x_i^2}{N};\ \sigma^2(R_2)=2\cdot\frac{(A+B)^2}{4\cdot N}+\frac{\sum_{i=3}^{N}x_i^2}{N};$$

$$\frac{A^2}{N}+\frac{B^2}{N}+\frac{\sum_{i=3}^{N}x_i^2}{N}>2\cdot\frac{(A+B)^2}{4\cdot N}+\frac{\sum_{i=3}^{N}x_i^2}{N};\ 2\cdot A^2+2\cdot B^2>A^2+2\cdot A\cdot B+B^2;$$

$$(A-B)^2>0. \qquad (2)$$

Последнее выражение при действительных аргументах, отличных от нуля, всегда больше нуля, следовательно, после замены оценка дисперсии чисел последовательности уменьшилась.

Выражение (2), полученное для x_1 и x_2, справедливо и для любой другой пары чисел последовательностей R_i ($i=1,N-1$), полученных после каждой замены, поэтому последующее поочередное усреднение пар чисел в последовательностях R_i ($i=1,N-1$) приводит к последовательному уменьшению $\sigma^2(R_i)$ и получению конечной последовательности:

$$R_{N-1}^1=(x_1^1,\quad x_2^2,\quad x_3^3,\quad \ldots,\ x_{N-1}^{N-1},\quad x_N^{N-1}), \qquad (3)$$

где верхний индекс для R_{N-1}^1 обозначает номер цикла усреднения всех элементов последовательности.

Выражение (2) получается и при $\overline{x}$, отличном от нуля. Для этого необходимо преобразование неравенства вида:

$$\frac{(A-\overline{x})^2}{N}+\frac{(B-\overline{x})^2}{N}+\frac{\sum_{i=3}^{N}(x_i-\overline{x})^2}{N}>2\cdot\frac{(\frac{A+B}{2}-\overline{x})^2}{N}+\frac{\sum_{i=3}^{N}(x_i-\overline{x})^2}{N}.$$

Данный вывод позволяет утверждать, что и при последующих заменах двух чисел последовательности их средними значениями σ^2 будет стремиться к нулю, т.е. при поочередном усреднении двух рядом стоящих чисел последовательности при $M\to N$ $\sigma^2\to 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 1: Если в последовательности R_{N-1}^1 по выражению (3) убрать все верхние индексы чисел и считать ее исходной для продолжения усреднений в соответствии с выражениями (1), то при выполнении N-1 усреднений согласно теореме получается последовательность R_{N-1}^2, для которой

$\sigma^2(R^1_{N-1} > \sigma^2(R^2_{N-1}).$

Аналогичное преобразование последовательности R^2_{N-1} и последующих производных последовательностей R^k_{N-1} (***k*** = 3, 4, 5, …) позволяет в соответствии с теоремой уменьшать оценку дисперсии, т.е.

$\sigma^2(R^1_{N-1} > \sigma^2(R^2_{N-1}) > \sigma^2(R^3_{N-1}) > ... > \sigma^2(R^k_{N-1}),$

где ***k*** – номер цикла преобразования последовательности.

Следствие 2: Если в последовательности R^1_{N-1} по выражению (3) усреднить первое и последнее число в соответствии с выражением

$$x^N_N = x^N_1 = \frac{x^{N-1}_N + x^1_1}{2}, \qquad (4)$$

то сумма чисел и среднее значение для чисел новой последовательности $R^1_N = (x^N_1,\ \ x^2_2,\ \ x^3_3,\ \ ...,\ x^{N-1}_{N-1},\ \ x^N_N)$ не изменится, а оценка дисперсии $\sigma^2(R^1_{N-1}) > \sigma^2(R^1_N).$

Следствие 3: Если в последовательности R^1_N из следствия 2 убрать все верхние индексы чисел и считать ее исходной для продолжения усреднений, то при выполнении ***N***-1 усреднений в соответствии с выражениями (1) и ***N***-го усреднения в соответствии с выражением (4) сумма чисел и среднее значение для чисел новой последовательности R^2_N не изменится, а оценка дисперсии $\sigma^2(R^1_N) > \sigma^2(R^2_N).$

Следствие 4: На основании следствий 1-3 можно сделать вывод о том, что процесс усреднения чисел исходной последовательности $\boldsymbol{R_1}$ можно производить циклически с использованием выражений (1) и (4). В процессе усреднений при ***k*** → ∞ оценка дисперсии значений чисел $\boldsymbol{\sigma^2(k)}$ → 0.

Следствие 4 подтверждает возможность минимизации оценки дисперсии чисел, составляющих замкнутую цепочку чисел.

Следствие 5: Выводы теоремы справедливы, если в последовательности $\boldsymbol{R_1}$ после каждых ***N***-1 преобразований вводить обратную нумерацию чисел и производить их усреднение по новой нумерации с учетом выражения (1).

Следствие 5 подтверждает возможность минимизации оценки дисперсии чисел, составляющих разомкнутую цепочку чисел, для случая циклического усреднения чисел, начиная поочередно с разных концов цепочки.

Аналогично доказывается теорема для обоснования алгоритма ликвидации дисбаланса нагрузки в РВС с последовательным усреднением нагрузки для трех соседних подсистем.

Разработанные алгоритмы описаны на языке Delphi и включены в комплекс программ «Синар-1» [3], предназначенный для проектирования распределенных вычислительных систем и используемый в учебном процессе кафедры вычислительной техники ГОУ ОГУ.

Библиографический список

1. Богатырев, В.А. К распределению функциональных ресурсов в отказоустойчивых многомашинных вычислительных системах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2001. – №12. –С. 1 – 5.

2. Крюков, В.В. Алгоритм баланса нагрузки для обеспечения режима реального времени в распределенной системе сбора и обработки данных / В.В. Крюков, В.С. Майоров, К.И. Шахгельдян // Информационные технологии. – 2004. – №7.

3. Аралбаев, Т.З., Галимов, Р.Р. Свидетельство о регистрации программного средства «Распределение нагрузки управляющих средств нижнего уровня системы мониторинга распределенных объектов» / Университетский фонд алгоритмов и программ. ОГУ; дата регистрации: 04 августа 2008 г.; № 377.