Урываев Б.В. Об одной линейной релаксации разрезного многогранника. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 59-61.

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕЛАКСАЦИИ РАЗРЕЗНОГО МНОГОГРАННИКА

Б.В. Урываев

Ярославский государственный университет,
г. Ярославль

Разрезной многогранник [1] и его линейные релаксации связаны со многими важными комбинаторными задачами, такими, как «максимальный разрез», «максимальная 2-выполнимость» и др. Рассмотрим некоторые линейные релаксации разрезного многогранника, первая из которых исследовалась в работе [2], установим ряд важных свойств.

В пространстве R^m при $m = 4n^2$ обозначим координаты точек x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, t_{ij}, ($i, j \in N_n$). Определим многогранник M_n системой ограничений:

$$x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} + t_{ij} = 1, \tag{1}$$

$$x_{ij} + y_{ij} = x_{kj} + y_{kj}, \tag{2}$$

$$x_{ij} + z_{ij} = x_{ik} + z_{ik}, \tag{3}$$

$$x_{ij} = x_{ji},\ t_{ij} = t_{ji},\ y_{ij} = z_{ji}, \tag{4}$$

$$y_{ii} = z_{ii} = 0, \tag{5}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ y_{ij} \geq 0,\ z_{ij} \geq 0,\ t_{ij} \geq 0, \tag{6}$$

где i, j, k независимо пробегают значения 1, 2, …, n.

Обозначим $M_{n,3}$ многогранник, удовлетворяющий ограничениям (1) – (6) для многогранника M_n и дополнительным ограничениям для каждой тройки i, j, k:

$$x_{ij} + t_{ij} + x_{ik} + t_{ik} + y_{jk} + z_{jk} \leq 2, \tag{7}$$

$$x_{ij} + t_{ij} + y_{ik} + z_{ik} + x_{jk} + t_{jk} \leq 2, \tag{8}$$

$$y_{ij} + z_{ij} + x_{ik} + t_{ik} + x_{jk} + t_{jk} \leq 2, \tag{9}$$

$$y_{ij} + z_{ij} + y_{ik} + z_{ik} + y_{jk} + z_{jk} \leq 2. \tag{10}$$

Установим ряд важных свойств многогранника $M_{n,3}$.

Свойство 1. Общее число ограничений в (1)-(10) полиномиально по n.

Свойство 2. Размерность многогранника $M_{n,3}$ равна $n(n+1)/2$.

Свойство 3. Множество целочисленных вершин многогранника $M_{n,3}$ состоит из 2^n точек, каждая из которых имеет координаты:

$$x_{ij} = x_{ii}x_{jj},\ y_{ij} = (1 - x_{ii})x_{jj},\ z_{ij} = x_{ii}(1 - x_{jj}),\ t_{ij} = (1 - x_{ii})(1 - x_{jj}),$$

где $x = (x_{11}, \ldots, x_{nn}) \in R^n$ – произвольный вектор из нулей и единиц.

Свойство 4. Все целочисленные вершины многогранника $M_{n,3}$ являются попарно смежными.

Свойствами 3 и 4 обладает многогранник M_n (см. [2]). Поскольку новые гиперплоскости (7)-(10) не «срезают» целочисленные вершины, то ребра между ними останутся ребрами. Таким образом, утверждения 3 и 4 справедливы и для $M_{n,3}$.

Введём следующие обозначения:

$$x_{ijk} = ½\,(2 - x_{ij} - t_{ij} - x_{ik} - t_{ik} - y_{jk} - z_{ik}), \tag{11}$$

$y_{ijk} = ½ (2 – y_{ij} – z_{ij} – x_{ik} – t_{ik} – x_{jk} – t_{ik})$, (12)

$z_{ijk} = ½ (2 – x_{ij} – t_{ij} – y_{ik} – z_{ik} – x_{jk} – t_{ik})$, (13)

$t_{ijk} = ½ (2 – y_{ij} – z_{ij} – y_{ik} – z_{ik} – y_{jk} – z_{ik})$, (14)

$x_{i,j,n+1} = z_{i,j}$, $y_{i,j,n+1} = x_{i,j}$, $z_{i,j,n+1} = y_{i,j}$, $t_{i,j,n+1} = t_{i,j}$,

где $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j < k$.

Нетрудно проверить, что выполняются условия

$x_{ijk} + y_{ijk} + z_{ijk} + t_{ijk} = 1$, (15)

$x_{ijk} + y_{ijk} = x_{ilk} + y_{ilk}$, (16)

$x_{ijk} + z_{ijk} = x_{ijl} + z_{ijl}$, (17)

$y_{ijk} + z_{ijk} = y_{ljk} + z_{ljk}$, (18)

$x_{ijk} \geq 0$, $y_{ijk} \geq 0$, $z_{ijk} \geq 0$, $t_{ijk} \geq 0$. (19)

где $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$, $i < j < k$.

Отметим, что система ограничений (15) – (19) легко приводится к виду $Ax = e$, $x \geq 0$, где A – булева матрица, e – вектор из единиц; т. е. многогранник, задаваемый этими условиями, является релаксационным многогранником разбиений. В то же время он находится во взаимнооднозначном соответствии с многогранником $M_{n,3}$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма. $M_{n,3}$ является релаксационным многогранником разбиений.

Теорема. $M_{n,3}$ является квазицелочисленным релаксационным многогранником разбиений.

Справедливость данного утверждения следует из предыдущего и из теоремы Трубина, приведенной, например, в [3].

Обозначим W^n множество целых вершин многогранника M_n. Выпуклая оболочка $\operatorname{conv} W^n$ может быть преобразована в разрезной многогранник. M_n соответствует корневому полуметрическому многограннику, а $M_{n,3}$ – полуметрическому (см. [1]). Выполняется $\operatorname{conv} W^n \subseteq M_{n,3} \subseteq M_n$. Таким образом, M_n и $M_{n,3}$ можно рассматривать как линейные релаксации разрезного многогранника, причём $\operatorname{conv} W^2 = M_2$ и $\operatorname{conv} W^3 = M_{3,3}$. Более тесная релаксация $M_{n,4}$, такая, что $W^4 = M_{n,4}$, определяется добавлением к ограничениям (1) – (10) новых неравенств (запишем их, используя обозначения (11) – (14)):

$x_{ij} + x_{ik} + x_{il} + x_{jk} + x_{jl} + x_{kl} + t_{ijk} + t_{ijl} + t_{ikl} + t_{jkl} \geq 1$,

$x_{ij} + x_{ik} + z_{il} + x_{jk} + z_{jl} + z_{kl} + t_{ijk} + y_{ijl} + y_{ikl} + y_{jkl} \geq 1$,

$x_{ij} + z_{ik} + x_{il} + z_{jk} + x_{jl} + y_{kl} + y_{ijk} + t_{ijl} + z_{ikl} + z_{jkl} \geq 1$,

$x_{ij} + z_{ik} + z_{il} + z_{jk} + z_{jl} + t_{kl} + y_{ijk} + y_{ijl} + x_{ikl} + x_{jkl} \geq 1$,

$z_{ij} + x_{ik} + x_{il} + y_{jk} + y_{jl} + x_{kl} + z_{ijk} + z_{ijl} + t_{ikl} + x_{jkl} \geq 1$,

$z_{ij} + x_{ik} + z_{il} + y_{jk} + t_{jl} + z_{kl} + z_{ijk} + x_{ijl} + y_{ikl} + z_{jkl} \geq 1$,

$z_{ij} + z_{ik} + x_{il} + t_{jk} + y_{jl} + y_{kl} + x_{ijk} + z_{ijl} + z_{ikl} + y_{jkl} \geq 1$,

$z_{ij} + z_{ik} + z_{il} + t_{jk} + t_{jl} + t_{kl} + x_{ijk} + x_{ijl} + x_{ikl} + t_{jkl} \geq 1$,

$y_{ij} + y_{ik} + y_{il} + x_{jk} + x_{jl} + x_{kl} + x_{ijk} + x_{ijl} + x_{ikl} + t_{jkl} \geq 1$,

$y_{ij} + y_{ik} + t_{il} + x_{jk} + z_{jl} + z_{kl} + x_{ijk} + z_{ijl} + z_{ikl} + y_{jkl} \geq 1$,

$y_{ij} + t_{ik} + y_{il} + z_{jk} + x_{jl} + y_{kl} + z_{ijk} + x_{ijl} + y_{ikl} + z_{jkl} \geq 1$,

$y_{ij} + t_{ik} + t_{il} + z_{jk} + z_{jl} + t_{kl} + z_{ijk} + z_{ijl} + t_{ikl} + x_{jkl} \geq 1$,

$t_{ij} + y_{ik} + y_{il} + y_{jk} + y_{jl} + x_{kl} + y_{ijk} + y_{ijl} + x_{ikl} + x_{jkl} \geq 1,$

$t_{ij} + y_{ik} + t_{il} + y_{jk} + t_{jl} + z_{kl} + y_{ijk} + t_{ijl} + z_{ikl} + z_{jkl} \geq 1,$

$t_{ij} + t_{ik} + y_{il} + t_{jk} + y_{jl} + y_{kl} + t_{ijk} + y_{ijl} + y_{ikl} + y_{jkl} \geq 1,$

$t_{ij} + t_{ik} + t_{il} + t_{jk} + t_{jl} + t_{kl} + t_{ijk} + t_{ijl} + t_{ikl} + t_{jkl} \geq 1.$

Многогранники M_n и $M_{n,3}$ наряду с целочисленными имеют и нецелочисленные вершины. Интересен вопрос, «срезаются» ли они новыми гиперплоскостями, определяющими более тесные релаксации. Известно, что координаты нецелых вершин многогранника M_n принимают значения лишь из множества $\{0, 1, ½\}$; эти вершины не удовлетворяют условиям (7) – (10). Для $M_{n,3}$ этот вопрос пока открыт. $M_{n,3}$ имеет очень сложные вершины с произвольно большим знаменателем. Вершины многих классов, например, с координатами, принимающими значения ⅓ и ⅔, не удовлетворяют новым неравенствам, определяющим $M_{n,4}$.

Библиографический список

1. Бондаренко, В.А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. – Ярославль: Яросл. гос. ун-т. 1995. – 126 с.

2. Деза, М.М., Лоран, М. Геометрия разрезов и метрик: пер. с англ. Е. Пантелеевой и П. Сергеева / под ред. В. Гришухина. – М.: МЦНМО, 2001. – 736 с.

3. Емеличев, В.А., Ковалев, М.М., Кравцов, М.К. Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.