Галиакберов Р.В. Параметрическое оценивание многомерной по входу линейной динамической системы при наличии автокоррелированных помех во входных и выходных сигналах. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 66-69.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ПО ВХОДУ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ ВО ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ СИГНАЛАХ

Р.В. Галиакберов

Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара

Рассмотрим стационарную устойчивую систему с выходной переменной z_i и входной переменой $x_i^{(j)}$ с локально-коррелированными помехами. Система описывается следующим стохастическим уравнением:

$$\begin{aligned} & z_i - \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} z_{i-m} = \sum_{j=1}^{d} \sum_{m=0}^{r_j} a^{(mj)} x_{i-m}^{j}, \\ & y_i = z_i + \xi_1(i),\ w_i^{(j)} = x_i^{(j)} + \xi^{(j)}(i), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\xi_1(i)$ – помеха наблюдения в выходном сигнале;

$\xi^{(j)}(i)$ – помехи наблюдения соответственно в j -м входном сигнале.

Утверждение 1:

Пусть стационарная динамическая система с нулевыми начальными условиями (1), и выполняются условия 1°-5° [1]. Тогда $\begin{pmatrix} \hat{b}(N) \\ \text{-----} \\ \hat{a}(N) \end{pmatrix}$ (при $N \to \infty$) существует и является сильно состоятельной оценкой, т.е. $\begin{pmatrix} \hat{b}(N) \\ \text{-----} \\ \hat{a}(N) \end{pmatrix} \xrightarrow[N\to\infty]{п.н.} \begin{pmatrix} b_0 \\ \text{--} \\ a_0 \end{pmatrix}$.

Доказательство: Рассмотрим функцию:

$$\frac{1}{N}U_N(b,a) = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Big(z_i + \xi_1(i) - \big(z_r^T(i) + \Xi_r^T\big)b - \Big(\big(x_{r_1}^{(1)}(i)\big)^T + \Xi_{r_1}^T\Big)a^{(1)} - \ldots$$

$$-\Big(\big(x_{r_d}^{(d)}(i)\big)^T + \Xi_{r_d}^T\Big)a^{(d)}\Big)^2 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Big(\xi_1(i) - z_r^T(i)\tilde{b} - \big(x_{r_1}^{(1)}(i)\big)^T\tilde{a}^{(1)} - \ldots -$$

$$-\big(x_{r_d}^{(d)}(i)\big)^T\tilde{a}^{(d)} - \Xi_r^T b - \Xi_{r_1}^T a^{(1)} - \ldots - \Xi_{r_d}^T a^{(d)}\Big)^2 = v_1 + v_2 + v_3,$$

$$v_1 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Big(\xi_1^2(i) + b^T\Xi_r\Xi_r^T b + a^{(1)}\Xi_{r_1}\Xi_{r_1}^T a^{(1)} + \ldots + a^{(d)}\Xi_{r_d}\Xi_{r_d}^T a^{(d)} +$$

$$+ 2b^T\Xi_r\Xi_{r_1}^T a^{(1)} + \ldots 2b^T\Xi_r\Xi_{r_d}^T a^{(d)} - 2\xi_1(i)\Xi_r^T b - 2\xi_1(i)\Xi_{r_1}^T a^{(1)} - \ldots$$

$$- 2\xi_1(i)\Xi_{r_d}^T a^{(d)} + 2\big(a^{(1)}\big)^T\Xi_{r_1}\Xi_{r_2}a^{(2)} + \ldots + 2\big(a^{(d-1)}\big)^T\Xi_{r_{d-1}}\Xi_{r_d}a^{(d)}\Big),$$

$$v_2 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}\tilde{b}\\ \hdashline \tilde{a}^{(1)}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \tilde{a}^{(d)}\end{pmatrix}^T\Big(z_r^T(i)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \big(x_{r_d}^{(d)}(i)\big)^T\Big)^T \times \Big(z_r^T(i)\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \big(x_{r_d}^{(d)}(i)\big)^T\Big)\begin{pmatrix}\tilde{b}\\ \hdashline \tilde{a}^{(1)}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \tilde{a}^{(d)}\end{pmatrix}$$

$$v_3 = 2N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Big(-\xi_1(i)z_r^T(i)\tilde{b} - \xi_1(i)\big(x_{r_1}^{(1)}(i)\big)^T\tilde{a}^{(1)} - \ldots - \xi_1(i)\big(x_{r_d}^{(d)}(i)\big)^T\tilde{a}^{(d)} +$$

$$+ b^T\Xi_r z_r^T(i)\tilde{b} + \big(a^{(1)}\big)^T\Xi_{r_1}z_r^T(i)\tilde{b} + \ldots + \big(a^{(d)}\big)^T\Xi_{r_d}z_r^T(i)\tilde{b} + b^T\Xi_r\big(x_{r_1}^{(1)}(i)\big)^T\tilde{a}^{(1)} +$$

$$\ldots + b^T\Xi_r\big(x_{r_d}^{(d)}(i)\big)^T\tilde{a}^{(d)} + + \big(a^{(1)}\big)^T\Xi_{r_1}\big(x_{r_1}^{(1)}(i)\big)^T\tilde{a}^{(1)} + \ldots$$

$$+ \big(a^{(1)}\big)^T\Xi_{r_1}\big(x_{r_d}^{(d)}(i)\big)^T\tilde{a}^{(d)} + + \ldots\big(a^{(d)}\big)^T\Xi_{r_d}\big(x_{r_d}^{(d)}(i)\big)^T\tilde{a}^{(d)}\Big).$$

Тогда из условия 5° по лемме 1.1 [2] получаем:

$$v_1 \xrightarrow[N\to\infty]{п.н.} h_{\xi_1}(0) + \big(H_{\xi_1}, b, b\big) + \big(H_{\Xi_2}, a, a\big) - 2\big(\bar{h}_{\xi_1}, b\big).$$

Из условия 4°: $v_2 \xrightarrow[N\to\infty]{п.н.} \begin{pmatrix}\tilde{b}\\ \hdashline \tilde{a}\end{pmatrix}^T H^*\begin{pmatrix}\tilde{b}\\ \hdashline \tilde{a}\end{pmatrix},\ \forall\begin{pmatrix}\tilde{b}\\ \hdashline \tilde{a}\end{pmatrix} \in \tilde{B}$. Оставшееся слагаемое в силу условий 2°,3°,4° удовлетворяет условиям леммы 1.2[2], сходится к нулю.

Заметим, что
$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}b^T\Xi_r z_r^T(i)\tilde{b} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}b^T\begin{pmatrix} z_{i-1}\xi_1(i-1) & \cdots & z_{i-r}\xi_1(i-1)\\ \vdots & & \\ z_{i-1}\xi_1(i-r) & \cdots & z_{i-r}\xi_1(i-r)\end{pmatrix}\tilde{b}\ . \qquad (2)$$

Таким образом, (2) можно представить в виде r^2 слагаемых, каждое из которых согласно 2°, 3°, 4° по лемме 1.2 [2] сходится к нулю.

Аналогично можно доказать, что и все остальные слагаемые v_3 сходятся к нулю с вероятностью 1 при $N\to\infty$. Следовательно,

$$v_3 \xrightarrow[N\to\infty]{п.н.} 0,\ \forall\begin{pmatrix} b \\ \text{--} \\ a \end{pmatrix} \in \overline{B} \quad и \quad N^{-1}U_N(b,a) \xrightarrow[N\to\infty]{п.н.} h_{\xi_1}(0) + \left(H_{\xi_1}, b, b\right) +$$

$$+\left(H_{\Xi_2}, a, a\right) - 2\left(\overline{h}_{\xi_1}, b\right) + \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \text{--} \\ \tilde{a} \end{pmatrix}^T H^* \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \text{--} \\ \tilde{a} \end{pmatrix} = \overline{U}(b,a). \tag{3}$$

Покажем, что решение задачи $\min \omega^{-1}\left(b, a^{(1)}, \ldots, a^{(d)}\right)\overline{U}(b,a), \begin{pmatrix} b \\ \text{--} \\ a \end{pmatrix} \in \tilde{B}$ (4) существует и сходится в единственной точке $\left(b \mid a\right) = \left(b_0 \mid a_0\right)$.

Для этого представим (3) в следующем виде:

$$\overline{U}(b,a) = h_{\xi_1}(0) + \begin{pmatrix} b_0 \\ \text{--} \\ a_0 \end{pmatrix}^T H^* \begin{pmatrix} b_0 \\ \text{--} \\ a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ \text{--} \\ a \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{c|c} H_{zz} + H_{\xi_1} & H_{zx} \\ \hline H_{zx}^T & H_{xx} + H_{\xi_2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} b \\ \text{--} \\ a \end{pmatrix} -$$

$$-2\begin{pmatrix} H_{zz}b_0 + H_{zx}a_0 + \overline{h}_{\xi_1} \\ \text{--} \\ H_{zx}^T b_0 + H_{xx}a_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b \\ \text{--} \\ a \end{pmatrix}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$V(b,a,\theta) = \overline{U}(b,a) - \theta\omega\left(b, a^{(1)}, \ldots a^{(d)}\right), \theta \in R_1, V(\theta) = \min V(b,a,\theta), \begin{pmatrix} b \\ \text{--} \\ a \end{pmatrix} \in \tilde{B}.$$

$$\text{Тогда } V(\theta) = h_{\xi_1}(0) - \theta h_{\xi_1}(0) + \begin{pmatrix} b_0 \\ \text{--} \\ a_0 \end{pmatrix}^T H^* \begin{pmatrix} b_0 \\ \text{--} \\ a_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{zz}b_0 + H_{zx}a_0 + \overline{h}_{\xi_1}(1-\theta) \\ \text{--} \\ H_{zx}^T b_0 + H_{xx}a_0 \end{pmatrix}^T \cdot$$

$$\cdot\left(H^* + H_{\xi_{1,2}} - \theta H_{\xi_{1,2}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} H_{zz}b_0 + H_{zx}a_0 + \overline{h}_{\xi_1}(1-\theta) \\ \text{--} \\ H_{zx}^T b_0 + H_{xx}a_0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что уравнение $V(\theta) = 0$ на интервале $\left(-\infty, \lambda_{\min} + 1\right)$ имеет корень $\hat{\theta} = 1$, где $\lambda_{\min} > 0$ – наименьшее собственное число регулярного пучка квадратичных форм, определяемых положительно определенными матрицами H^* и $H^*_{\xi_{1,2}}$. К тому же этот корень является единственным на интервале $\left(-\infty, \lambda_{\min} + 1\right)$, что вытекает из непрерывности функции $V(\theta)$ на этом интервале, и $\dot{V}(\theta) < 0$ на $\left(-\infty, \lambda_{\min} + 1\right)$, и отсюда непосредственно следует существование и единственность (4). В дальнейшем ход доказательства практически полностью аналогичен доказательству [3], при

$$V = \begin{bmatrix} -1 \\ \text{--} \\ a \\ \text{--} \\ b \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_{Y,W} = \left|-Y \mid A_{Y,W}\right|, \quad D^* = \left[\begin{array}{c|c} h_{\xi_1}(0) & \overline{h}^T_{\xi_{1,2}}(0) \\ \hline \overline{h}_{\xi_{1,2}}(0) & H_{\xi_{1,2}} \end{array}\right].$$

На основе приведенного утверждения был разработан и реализован на базе математического пакета Matlab комплекс программ, позволяющий получать оценки матриц параметров с наперед заданной точностью.

Библиографический список

1. Параметрическая идентификация линейной динамической системы при наличии автокоррелированных помех в сигналах / Р.В. Галиакберов, О.А. Кацюба //

20-я Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях». – Т. 2. – Ярославль, 2007. – С. 83 – 84.

2. Кацюба, О.А., Жданов, А.И. О состоятельных оценках решений некорректных стохастических алгебраических уравнений при идентификации параметров линейных разностных операторов // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. – 1981. – №5. – С. 165 – 172.

3. Идентификация многомерных по входу стационарных линейных динамических систем / А.Н. Волныкин, О.А. Кацюба // Изв. Самарского научного центра Российской академии наук. – 2006. – №4.