Артюхина Е.В., Горбаченко В.И. Решение волновых реакционно-диффузионных уравнений на радиально-базисных нейронных сетях. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 73-76.

РЕШЕНИЕ ВОЛНОВЫХ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА РАДИАЛЬНО-БАЗИСНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ*

Е.В. Артюхина, В.И. Горбаченко

Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза

Для описания автоволн часто используется модель с кинетикой типа активатор-ингибитор, содержащая два реакционно-диффузионных уравнения [1]. Для волн экзотермической реакции роль активатора играет тепло, а ингибитора – продукты реакции. Для волн экзотермической реакции модель имеет вид [2]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = L\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \Phi(\eta,\theta), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Z\Phi(\eta,\theta), \quad (2)$$

где η – концентрация продукта реакции; t – время; L – число Льюиса; $\Phi = (1-\eta)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)$ – нелинейный источник; θ – температура; Z – число Зельдовича, равное отношению длины волны к размеру зоны реакции; типичное значение параметра $\beta = 0,9/Z$; L – малая величина. Для различных значений параметра Z характерны режимы от стационарного до хаоса.

Граничные условия имеют вид:

$$x = 0, \quad \theta = -Z, \quad \eta = 1, \quad x = l, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \eta = 0. \quad (3)$$

Необходимы также начальные условия. В результате решения задачи определяется положение фронта волны.

Для решения системы уравнений (1) – (2) с граничными условиями (3) применим радиально-базисные нейронные сети (RBFNN) [3]. Для этого представим неизвестные функции решения в виде:

$$\eta = \sum_{k=1}^{m1} w_{Yk} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-c_{Yk})^2}{a_{Yk}^2}}, \quad \theta = \sum_{k=1}^{m2} w_{Tk} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-c_{Tk})^2}{a_{Tk}^2}}, \quad (4)$$

* Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ 06-07-89259 «Применение радиально-базисных нейронных сетей для решения краевых задач»).

где m_1 и m_2 – количество нейронов первого слоя первой и второй сети; w_{Yk} и w_{Tk} – веса нейронов; c_{Yk} и c_{Tk} – центры радиально-базисных функций; a_{Yk} и a_{Tk} – ширина радиально-базисных функций.

Система (4) может быть аппроксимирована следующей нелинейной схемой:

$$\frac{Y_i^{j+1}-Y_i^j}{\tau}=L\frac{Y_{i+1}^{j+1}-2Y_i^{j+1}+Y_{i-1}^{j+1}}{h^2}+F\left(Y_i^{j+1},T_i^{j+1}\right), \tag{5}$$

$$\frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{\tau}=\frac{T_{i+1}^{j+1}-2T_i^{j+1}+T_{i-1}^{j+1}}{h^2}+ZF\left(Y_i^{j+1},T_i^{j+1}\right), \tag{6}$$

где $i=1,2,...,n$ и $j=0,1,2,...$ – соответственно точки пространственной и временной сеток; τ – шаги сетки по пространственной и временной координатам. Преобразуем систему (5) – (6) к виду, удобному для реализации численных методов, учитывая, что L – малая величина и может быть $L=0$. В результате получаем систему разностных уравнений:

$$Y_0^{j+1}=0,\quad T_0^{j+1}=-Z,$$

$$LY_{i+1}^{j+1}-\left(2L+\frac{h^2}{\tau}\right)Y_i^{j+1}+LY_{i-1}^{j+1}=-h^2\left(\frac{1}{\tau}Y_i^j+\Phi\left(Y_i^{j+1},T_i^{j+1}\right)\right),$$

$$T_{i-1}^{j+1}-\left(2+\frac{h^2}{\tau}\right)T_i^{j+1}+T_{i+1}^{j+1}=-h^2\left(\frac{1}{\tau}T_i^j+Z\Phi\left(Y_i^{j+1},T_i^{j+1}\right)\right),\quad i=1,2,...,n-1,$$

$$Y_n^{j+1}=1,\qquad 2T_{n-1}^{j+1}-\left(2+\frac{h^2}{\tau}\right)T_n^{j+1}=-h^2\left(\frac{1}{\tau}T_n^j+Z\Phi\left(Y_n^{j+1},T_n^{j+1}\right)\right).$$

Для нахождения η и θ определяем функционал ошибки как сумму квадратов невязок, получаемых при подстановке решения (4) и его производных в систему разностных уравнений

$$I\left(w,c,a\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(R_{Yi}^{\ 2}+R_{Ti}^{\ 2}\right)+R'^{\ 2}_{Tn}, \tag{7}$$

где i – номер контрольной точки,

$$R_{Yi}=LY_{i+1}^{j+1}-\left(2L+\frac{h^2}{\tau}\right)Y_i^{j+1}+LY_{i-1}^{j+1}+h^2\left(\frac{1}{\tau}Y_i^j+F\left(Y_i^{j+1},T_i^{j+1}\right)\right), \tag{8}$$

$$R_{Ti}=T_{i+1}^{j+1}-\left(2+\frac{h^2}{\tau}\right)T_i^{j+1}+T_{i-1}^{j+1}+h^2\left(\frac{1}{\tau}T_i^j+ZF\left(Y_i^{j+1},T_i^{j+1}\right)\right), \tag{9}$$

$$R'_{Tn}=2T_{n-1}^{j+1}-\left(2+\frac{h^2}{\tau}\right)T_n^{j+1}+h^2\left(\frac{1}{\tau}T_n^j+Z\Phi\left(Y_n^{j+1},T_n^{j+1}\right)\right). \tag{10}$$

Для обучения сети используется градиентный алгоритм обучения, минимизирующий функционал (7) путем настройки весов w, центров c и ширины a. Несложно вычисляются градиенты функционала по параметрам сети. Процесс уточнения параметров продолжается до достижения определенной погрешности.

Для преодоления эффекта переобучения сети вместо постоянной сетки используется набор сеток. Через определенное количество итераций случайно изменяем количество узлов сетки в некотором, заранее заданном диапазоне $\left[n_1;n_2\right]$

, тем самым мы меняем набор контрольных точек, уменьшаем ошибку аппроксимации вне узлов аппроксимации.

В системе MATLAB проведено моделирование разработанного алгоритма решения на RBF-сети. Результаты моделирования показали эффективность нейросетевого алгоритма.

Библиографический список

1. Васильев, В.А. Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах / В.А. Васильев, Ю.М. Романовский, В.Г. Яхно // Успехи физических наук. – 1979. – Т. 128. – Вып. 4. – С. 625 – 666.

2. Довженко, А.Ю. Поведение автоволн вблизи порога распространения при быстрой диффузии активатора / А.Ю. Довженко, Э.Н. Руманов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2004. – Т. 125. – Вып. 2. – С. 406 – 413.

3. Numerical solution of elliptic partial differential equation using radial basis function neural networks / Li Jianyu, Luo Siwei, Qi Yingjiana, Huang Yapinga // Neural Networks. – 2003. – 16(5/6). – P. 729 – 734.