

Матвеева Н.О. Распараллеливание решения методом конечных разностей эллиптического дифференциального уравнения в частных производных на графическом процессоре. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 86-89.

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ГРАФИЧЕСКОМ ПРОЦЕССОРЕ

Н.О. Матвеева

Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского, г. Пенза

Целью данной работы является разработка параллельной реализации метода конечных разностей для решения эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) на графическом процессоре (GPU) с использованием технологии CUDA и исследование эффективности распараллеливания путем сравнения времени решения ДУЧП на GPU и на центральном процессоре.

Рассматривалось двумерное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in S,$$

с граничными условиями $u|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$, где Γ – некоторый прямоугольник.

Решение искалось в узлах равномерной сетки с постоянным шагом h . Использовались пятиточечный шаблон и итерационный метод Зейделя.

Перед началом итерационного процесса решения системы алгебраических разностных уравнений необходимо вычислить два массива коэффициентов A_x и A_y , связывающие узлы в шаблоне, соответственно по осям X и Y , значения в граничных точках, значения функции правой части в узлах сетки. Все элементы этих массивов вычисляются независимо друг от друга и на графическом процессоре вычисляются параллельно.

Распараллеливание итерационного процесса – более сложная задача, так как используется метод Зейделя, в котором при вычислении каждого нового элемента вектора используются элементы, вычисленные ранее. Для параллельной реализации метода Зейделя при решении ДУЧП часто используется прием красно-черного упорядочения элементов, заключающийся в разделении узлов сетки на «красные» и «черные», как можно видеть на рис. 1. Сначала ищется новое приближение к решению в узлах одного цвета, затем в узлах другого цвета.

На графическом процессоре распараллеливание происходит следующим образом. Значения хранятся в виде матрицы размером $n \times m$, в одной матрице хранятся как значения внутренних, так и граничных узлов. Вычисления происходят в $n/2$ блоков независимо и параллельно (рис. 1), в каждом блоке $m-2$ потоков. Каждый поток в блоке записывает по одному значению в разделяемую память, что

позволяет значительно уменьшить вероятность двух одновременных обращений к одному и тому же элементу динамической памяти и ускоряет доступ потоков к требуемым данным.

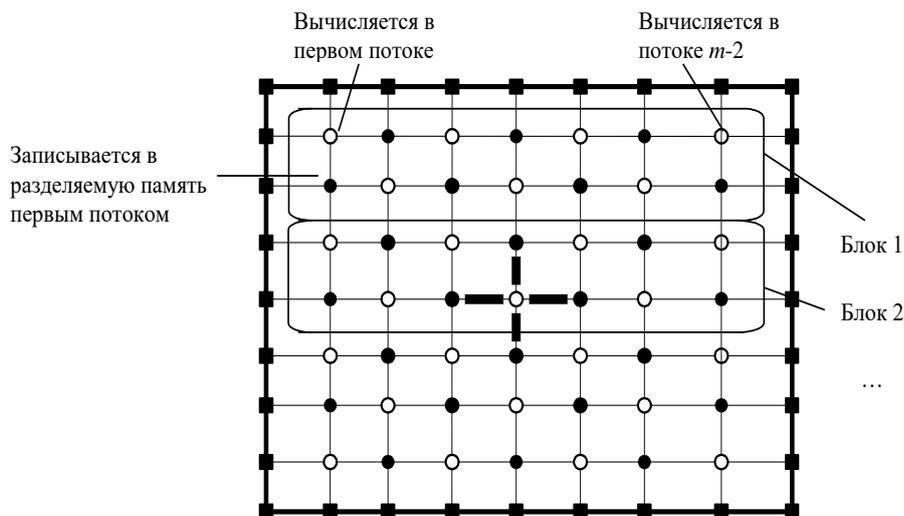


Рис. 1. Разбиение элементов по блокам и потокам

На графическом процессоре алгоритм реализовывался с помощью технологии CUDA, на центральном процессоре – в системе MATLAB. Для тестового ДУЧП (

$$f(x, y) = 3(x^2 + y^2), \sigma(x, y) = \frac{1}{xy}, \varphi(x, y) = x^3 y^3)$$

были проведены две серии экспериментов; в первой серии экспериментов исследовалась зависимость величины ускорения от количества узлов в сетки, во второй – от величины допустимой погрешности. Как видно из рис. 2, при числе узлов сетки 401

ускорение, вычисляемое по формуле $k = \frac{t_{CPU}}{t_{GPU}}$, где t_{CPU} – время решения на

центральном процессоре и t_{GPU} – время решения на графическом процессоре, равно округленно 47. При изменении величины допустимой погрешности и при постоянном числе узлов сетки, равном 81, также достигается существенное ускорение, например, при погрешности 10^{-4} ускорение округленно равно 16. Из рис. 3 видно, что GPU затрачивает на решение ДУЧП на порядок меньше времени, чем центральный процессор.

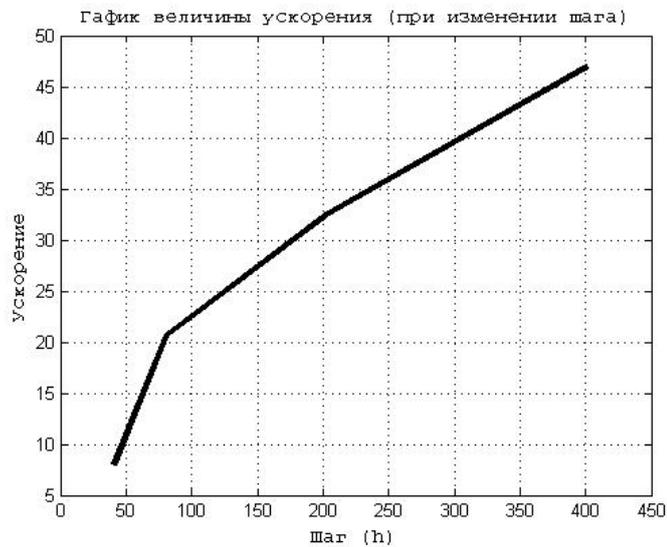


Рис. 2. График зависимости величины ускорения от числа узлов сетки

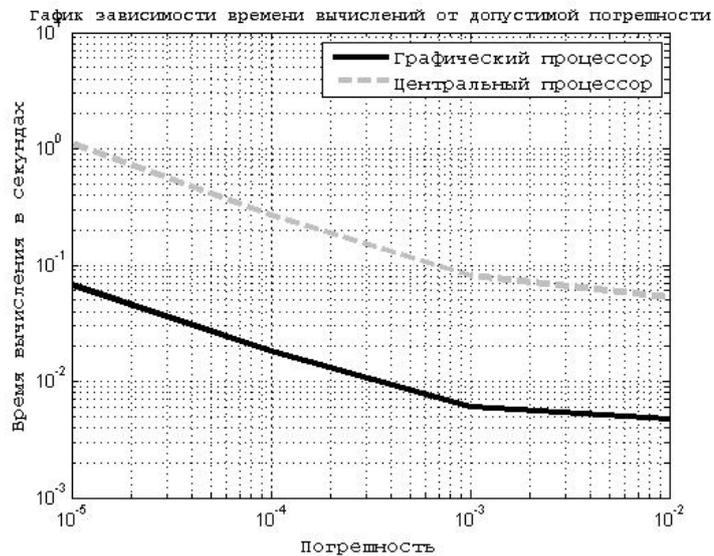


Рис. 3. Графики изменения времени решения от допустимой погрешности

В результате проведенной работы была разработана программа, реализующая распараллеливание алгоритма решения методом конечных разностей эллиптического дифференциального уравнения в частных производных. В результате распараллеливания было достигнуто существенное уменьшение времени вычислений, например, при числе узлов сетки 401 ускорение приблизительно равно 47.