Яремко Н.Н. Информационные технологии как инструментарий решения некорректных математических задач. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 147-150.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК ИНСТРУМЕНТАРИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н.Н. Яремко

Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза

В начале XXI века П.И. Пидкасистый [1] определяет процесс обучения «как процесс активного целенаправленного взаимодействия между обучающим и обучаемым, в результате которого у обучающегося формируются определенные знания, умения, навыки, опыт деятельности и поведения, а также личностные качества». Процесс обучения в высшей школе имеет свою специфику. При сходстве с основной структурой дидактического процесса он обнаруживает свойства, основанные на следующих позициях:

– вузовское обучение представляет собой профессиональное обучение;
– вузовское обучение осуществляется в таких учебных заведениях, которые являются и исследовательскими учреждениями;
– вузовское обучение осуществляется в особых формах организации преподавания и обучения.

В соответствии с высказанными положениями обучение высшей математике на экономическом факультете должно иметь профессиональную направленность, соответствовать современному уровню знаний и научных исследований, демонстрировать прикладное значение математики во многих важных содержательных вопросах, подчеркивать роль математики как эффективного и практического средства познания мира. Некорректные математические задачи играют роль средства достижения поставленных целей.

Задачи, возникающие из практических потребностей, в большинстве случаев некорректны, т.е. имеют неединственное решение либо содержат противоречивые данные, либо неустойчивы [2]. Напротив же, задачи, предлагаемые в учебниках по высшей математике, обладают математической определенностью и устойчивостью. Таким образом, потребность в изучении некорректных задач, их методов решения диктуется самой практикой современной жизни. Некоторые дидактические аспекты применения некорректных задач в обучении математике рассмотрены в работе [3].

Процесс решения некорректной задачи носит циклический характер. Он начинается с исходной проблемной ситуации, которая в результате проведения содержательного анализа переводится в практическую задачу. Далее практическая задача формализуется, и строится ее математическая модель, которая затем решается. Полученный результат оценивается с точки зрения критериев, предъявляемых формализованной моделью и реальной проблемной ситуацией.

Таким образом, процесс решения задачи завершается возвратом к исходной проблеме, проверкой полученного результата, его практической интерпретацией. Если полученный результат не удовлетворяет условиям проблемной ситуации, то весь процесс повторяется заново, выбирается другая математическая модель, и после проведения решения результат вновь оценивается с точки зрения условий исходной проблемной ситуации. Весь процесс решения обладает цикличностью, представляет собой спиралеобразную процедуру. Решение завершается после выполнения нескольких циклов, когда получен результат, удовлетворяющий практическим потребностям, сформулированным в исходной проблемной ситуации.

Рассмотрим задачи о диете, относящиеся к линейной алгебре и линейному программированию. При их решении возникает потребность в проведении большого объема вычислений, поэтому в данном случае использование пакетов символьной математики естественно обоснованно. Ввиду большого объема вычислений при их решении возникает потребность использования стандартных пакетов символьной математики Mathcad, Maple, Mathematica, MatLab.

Задача. Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки определенное количество питательных веществ B_1, B_2, B_3. Используется два вида продуктов. Содержание питательных веществ в единице продукта, суточная норма их потребления и цена единицы продукта указаны в таблице.

Питательные вещества	*Суточная норма*	*Содержание питательных веществ в единице продукта*	
		n_1	n_2
B_1	*14*	*2*	*1*
B_2	*10*	*1*	*2*
B_3	*20*	*2*	*4*
Цена единицы продукта		*1*	*2*

Найти вариант диеты стоимостью в N денежных единиц, которая содержит в точности суточную норму питательных веществ.

Решение. Обозначим через x_1, x_2 число единиц продуктов. Условия задачи приводят к системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 14 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 = 20 \\ x_1 + 2x_2 = N \end{cases}$$

Задача имеет единственное решение лишь для стоимости диеты $N = 10$. При этом имеем вариант диеты: $x_1 = 6$, $x_2 = 2$. Любое, сколь угодно малое изменение стоимости диеты N приводит к противоречивости системы уравнений и отсутствию решений, т.е. полученная система уравнений неустойчива.

Рассмотрим случай несовместности системы, например, $N = 11$. Для несовместных систем определяют так называемое *псевдорешение*, которое задается как вектор (x_1, x_2), минимизирующий невязку:

$$\left((2x_1 + x_2 - 14)^2 + (x_1 + 2x_2 - 10)^2 + (2x_1 + 4x_2 - 20)^2 + (x_1 + 2x_2 - 11)^2 \right).$$

Получим: $x_1 = \dfrac{107}{18} \approx 5{,}94, \quad x_2 = \dfrac{38}{18} \approx 2{,}11$. Псевдорешение устойчиво.

Проведем экономический анализ полученного результата. Для этого подставим псевдорешение в систему. При данной диете происходит превышение суточного потребления веществ B_2 , B_3, и затраты на питание будут менее 11 денежных единиц. Полученный результат приводит к мысли, нельзя ли еще уменьшить стоимость диеты, при которой будет гарантировано суточное потребление питательных веществ. Так мы естественным образом подошли к необходимости изменения исходной математической модели. Новая математическая модель – задача линейного программирования, исследование на минимум стоимости диеты при ограничениях:

$$\begin{cases} z = x_1 + 2x_2 \to \min \\ 2x_1 + x_2 \geq 14, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 20. \end{cases}$$

Решение задачи можно найти, например, геометрическим методом. В результате имеем однопараметрическое множество оптимальных планов: $x_1 = t, \quad x_2 = \dfrac{10 - t}{2}, \quad 6 \leq t \leq 10$, для каждого из которых будут достигаться минимальные затраты на диету: $\min z = 10$, и будут полностью удовлетворены суточные потребности в питательных веществах B_1, B_2, B_3 (причем потребности в веществе B_1 будут превышены в случае планов $6 < t \leq 10$, а по веществам B_2, B_3 будет строгое равенство).

Следуя логике рассуждений экономического характера, студенты от классической задачи линейной алгебры решения системы линейных уравнений переходят к задаче отыскания псевдорешений несовместной системы линейных уравнений, а затем – к задаче линейного программирования. Далее возможно составление цепочки задач-обобщений:

1) возможно ли составить диету стоимостью, меньшей 10 денежных единиц? (отв.: нельзя);

2) найти замещение в диете продукта n_2 на другой продукт n_3 с тем же составом питательных веществ, но более дешевый, ценой a денежных единиц, при этом стоимость затрат на диету не должна превзойти 9 денежных единиц (отв.: $a \leq 1{,}5$);

3) найти диету, при которой обеспечивается максимальное потребление питательных веществ, например, B_1 (отв.: найти невозможно).

Библиографический список

1. Педагогика: учеб. пособие / под ред. П.И. Пидкасистого. – М.: Пед. об-во России, 2003. – 608 с.

2. Тихонов, А.Н., Арсенин, В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.

3. Яремко, Н.Н. Некорректные задачи при обучении математике в школе и вузе // Известия РГПУим.Герцена. Общественные и гуманитарные науки, №11(62). – СПб.,2008. – С. 339 – 346.