Чугунова В.В. Особенности изучения теоремы Рамсея в курсе дискретной математики. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 164-167.

ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕМЫ РАМСЕЯ В КУРСЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

В.В. Чугунова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза

При изучении теоремы Рамсея в курсе математики часто возникает проблема недопонимания основной идеи теоремы, которая скрывается за ее формулировкой. Существует несколько формулировок теоремы Рамсея. Рассмотрим некоторые из них.

1. Трактовка на языке теории множеств

Теорема Рамсея (бесконечный случай) [1]. Для всех $k, r \in \omega$ и произвольного r-раскрашивания χ: $\begin{bmatrix}\omega\\k\end{bmatrix} \to [r]$ множества всех k –элементных подмножеств множества ω всегда найдется бесконечное подмножество $S \subseteq \omega$ со всеми своими k-элементными подмножествами, имеющими один и тот же цвет.

Теорема Рамсея (конечный случай) [1]. Для всех $k, l, r \in \omega$ найдется $n(k, l, r) \in \omega$, такое, что если $n \geq n(k, l, r)$ и χ: $\begin{bmatrix}\omega\\k\end{bmatrix} \to [r]$ есть произвольное r-раскрашивание всех k-подмножеств из $[n]$, то некоторое l-подмножество из $[n]$ имеет все k-подмножества одного и того же цвета.

Наименьшие возможные значения чисел $n(k, l, r)$, известные как числа Рамсея, обозначаются $R(k, l, r)$.

2. Трактовка на языке теории графов

Пусть G – граф, ориентированный или неориентированный, с множеством вершин V. Предположим, что существует разложение графа G на μ частей, не пересекающихся по ребрам:

$$G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_\mu. \quad (1)$$

Построим некоторое семейство ребер графа G следующим образом. Возьмем произвольную вершину $a_0 \in V_0 = V$. Выберем семейство F_1 ребер от a_0, принадлежащих одному и тому же графу H_1' из (1). Множество концов этих ребер обозначим через V_1. Возьмем далее $a_1 \in V_1$ и построим такое семейство F_2 ребер от a_1 к $V_2 \subset V_1$, что все ребра в F_2 принадлежат одному графу H_2' из (1). Затем возьмем $a_2 \in V_2$ и будем продолжать этот процесс. Семейство ребер

$$F_1, F_2, \ldots, F_s \neq \varnothing, \quad (2)$$

полученное таким образом, будем называть сомкнутой цепочкой. В (2) каждое ребро F_i состоит из ребер одного графа H_i' из (1). Мы имеем

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_s \neq \varnothing, \quad (3)$$

и ребра из F_i соединяют вершину $a_{i-1} \in V_{i-1}$ с множеством $V_i \subset V_{i-1}$. Назовем a_{i-1} центром, принадлежащим графу H_i' в сомкнутой цепочке (2).

Теорема. Пусть c_1, c_2, …, c_k – семейство центров в сомкнутой цепочке (2), принадлежащих одному и тому же графу H из (1). Тогда подграф $G(c_1, c_2, …, c_k)$ является частью графа H.

3. Трактовка на языке теории элементарной арифметики

Пусть M – конечное или счетное множество элементов, которые будем называть «игроками». Если e – натуральное число, то подмножества M, содержащие ровно e элементов, будем называть «e-командами». Пусть задано некоторое разбиение e-команд из M на r непересекающихся классов (например, по «классу игры»).

Теорема Рамсея (бесконечный случай). Пусть e, $r > 0$ – натуральные числа. Если M – счетное множество, то для любого разбиения e-команд из M на r классов найдется бесконечное подмножество $H \leq M$, все e-команды которого попадают в один класс разбиения.

Теорема Рамсея (конечный случай). Существует вычислимая функция $R(e, r, k)$, такая, что при любых $e, r, k > 0$ для любого конечного множества M: если $|M| \geq R(e, r, k)$, то для любого разбиения P е-команд из M на r классов найдется подмножество $H \leq M$, такое, что $|H| \geq k$, и все е-команды из H попадают в один класс разбиения P.

Несмотря на несколько громоздкие формулировки теоремы, ее идея достаточно проста: если некоторая большая структура разбивается на непересекающиеся части, то можно гарантировать наличие в ней такой подструктуры, которая обладает определенными свойствами в одной из частей; и обратно – можно указать число элементов, которое должна содержать большая структура, чтобы любое ее разбиение содержало часть, обладающую определенными свойствами.

В качестве примера такой структуры рассмотрим множество звезд. Во множестве звезд всегда найдется группа звезд, которая с очень большой точностью образует какую-нибудь заданную конфигурацию: прямую линию, прямоугольник или «большой ковш».

С целью повышения доступности и наглядности изучаемого материала при изложении теоремы Рамсея полезно использовать примеры, хорошо знакомые учащимся из повседневной жизни, которые позволяют проиллюстрировать утверждение теоремы Рамсея. Наиболее ярким примером является «Задача о вечеринке»: если из присутствующих на вечеринке гостей случайным образом выбрать n человек, то среди них всегда окажется k знакомых друг с другом или k незнакомых друг с другом людей.

Число Рамсея в данной задаче можно определить как наименьшее число n, для которого в любой группе из n гостей окажется k знакомых друг с другом или k незнакомых друг с другом людей. Число Рамсея для $k = 3$ равно 6, то есть во всякой группе из 6 человек всегда найдется либо трое знакомых, либо трое незнакомых друг с другом. В этом случае можно дать наглядную иллюстрацию задачи с помощью ориентированного графа. Шесть человек представим шестью точками – вершинами орграфа. Для удобства точки расположим на плоскости так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Любые две точки соединим ребром, которое окрасим одним из двух цветов, чтобы представить отношения между соответствующими двумя людьми. Красное ребро будет означать, что соответствующие люди знакомы между собой, а синее ребро – что незнакомы. Следовательно, если три человека знакомы друг с другом, то рёбра между соответствующими точками образуют красный треугольник, а если эти трое незнакомы, то образуется синий треугольник. Тогда задачу о вечеринке можно сформулировать так: если каждое ребро, соединяющее любые две из шести точек, окрасить в синий или красный цвет произвольным образом, то всегда возникает либо синий, либо красный треугольник.

Использование при изложении теоремы Рамсея иллюстраций в виде понятных, достаточно простых задач позволит, на наш взгляд, сделать ее более доступной для изучения, вызвать интерес к возможным приложениям.

Работа выполнена при поддержке гранта РГНФ 08-06-00503а.

Библиографический список

1. Грэхем, Р. Начала теории Рамсея; пер. с англ. – М.: Мир, 1984.

2. Роналд Л. Грэм, Джоуэл Х. Спенсер. Теория Рамсея // В мире науки. – 1990. – №9.

3. Гарднер, М. Рамсеевская теория графов // Квант. – 1988. –№4.