Акимов А.И. Математическое моделирование теплофизических процессов в автоматических установках производства композиционных материалов. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей VIII Всерос. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2008. – С. 271-274.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АВТОМАТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ ПРОИЗВОДСТВА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.И. Акимов

Оренбургский государственный педагогический университет, г. Оренбург

Управление процессом полимеризации связано с разработкой теплофизических математических моделей. Основные трудности при создании таких моделей возникают из-за необходимости учета:

– многослойности конструкций с различными теплофизическими свойствами;

– фазовых переходов при полимеризации, которые описываются моделями Стефана;

– многостадийности процесса нагрева.

Температурный процесс полимеризации разделяется на этапы. Своеобразие теплофизических процессов на каждом из этапов создает необходимость использования различных математических моделей.

На первом этапе процесса математическая постановка задачи в цилиндрической системе координат для многослойной конструкции имеет вид:

$$\frac{1}{a_k}\frac{\partial t_k(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t_k(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_k(r,\tau)}{\partial r} + \frac{1}{b_k}\frac{\partial m_k(r,\tau)}{\partial r} + f_k(r,\tau); \quad (1)$$

$$\frac{1}{c_k}\frac{\partial m_k(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 m_k(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial m_k(r,\tau)}{\partial r} + h_k(r,\tau); \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u_k(r,\tau)}{\partial \tau^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_k(r,\tau)}{\partial r} - \frac{u_k(r,\tau)}{r^2} = \frac{k(1+\mu)}{1-\mu}\frac{\partial t_k(r,\tau)}{\partial r}, \quad (3)$$

$R_{k-1}(\varphi) < r < R_k(\varphi)$ для к=1,2,….n,

при начальных условиях

$$t_k(r,0) = t_0; \quad (4)$$

$$m_k(r,0) = m_0; \quad (5)$$

$$u_k(r,0) = 0; \quad (6)$$

и при граничных условиях

$$t_n(R_n(\varphi),\tau) + \frac{\lambda_n}{\alpha_n}\frac{\partial t_n(R_n(\varphi),\tau)}{\partial n} = P_n(\varphi,\tau); \quad (7)$$

$$m_n(R_n(\varphi),\tau) + \frac{\chi_n}{\beta_n}\frac{\partial m_n(R_n(\varphi),\tau)}{\partial n} = 0; \quad (8)$$

$$U_n(R_n(\varphi),\tau)=U_0; \tag{9}$$
$$t_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)=t_k(R_{k-1}(\varphi),\tau); \tag{10}$$
$$m_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)=m_k(R_{k-1}(\varphi),\tau); \kappa=2,\ldots,n; \tag{11}$$
$$U_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)=U_k(R_{k-1}(\varphi),\tau); \tag{12}$$
$$t_1(R_0(\varphi),\tau)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\frac{\partial t_1(R_0(\varphi),\tau)}{\partial n}=P_0(\varphi,\tau); \tag{13}$$
$$m_2(R_1(\varphi),\tau)-\frac{\chi_2}{\beta_2}\frac{\partial m_2(R_1(\varphi),\tau)}{\partial n}=0; \tag{14}$$
$$U_1(R_0(\varphi),\tau)=U_0; \tag{15}$$
$$\lambda_{k-1}\frac{\partial t_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)}{\partial n}=\lambda_k\frac{\partial t_k(R_{k-1}(\varphi),\tau)}{\partial n}; \tag{16}$$
$$æ_{k-1}\frac{\partial m_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)}{\partial n}=æ_k\frac{\partial m_k(R_{k-1}(\varphi),\tau)}{\partial n} \tag{17}$$

где a_k, λ_k, α_k – коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и теплопередачи соответственно; $c_k, æ_k, \beta_k$ – коэффициенты проводности потенциала массы, массопередачи и массоотдачи; W – доля жидкого состояния рассматриваемой среды (при затвердевании вещества); γ – плотность этой части среды; σ – скрытая теплота кристаллизации; τ – время; x – пространственная координата; t_k – температура области $D_{K,\tau}$, k = 1,2; m_k – объёмная концентрация k-го компонента; u_k – поле скоростей или деформации.

Отметим, что в задаче (1)-(17) описываются взаимосвязанные процессы тепло- и массообмена. Уравнение теплопроводности (1) содержит наряду с источниками тепла $f(r,\tau)$ слагаемые, обусловленные тепловыделениями за счет градиента m_k, и дополнено соответствующими уравнениями (2) и (3), где μ – безразмерный коэффициент, характеризующий свойства термонапряжений.

На втором этапе теплофизические процессы описываются следующей задачей:

$$\frac{1}{a_k}\frac{\partial t_k(r,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 t_k(r,\tau)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_k(r,\tau)}{\partial r}+\frac{1}{b_k}\frac{\partial m_k(r,\tau)}{\partial r}+f_k(r,\tau);$$
$$\frac{1}{c_k}\frac{\partial m_k(r,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 m_k(r,\tau)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial m_k(r,\tau)}{\partial r}+h_k(r,\tau);$$
$$\frac{\partial^2 u_k(r,\tau)}{\partial\tau^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_k(r,\tau)}{\partial r}-\frac{u_k(r,\tau)}{r^2}=\frac{k(1+\beta)}{1-\beta}\frac{\partial t_k(r,\tau)}{\partial r},$$

где

$$\frac{1}{b_k}\frac{\partial m_k(r,\tau)}{\partial r}+f_k(r,\tau)=\zeta(r,\tau);$$
$$t_k=t_{k,1}; m_k=m_{k,1}; u_k=u_{k,1}=u_r;$$

$R_{k-1}(\varphi)<r<R_k(\varphi)$ для к = 1, 2, …, j, …, n;

$R_o(\varphi) < r < \xi(\varphi,\tau)$ при 1 = I, $\xi(\varphi,\tau) < r < R_n(\varphi)$ при 1 = II, при начальных условиях

$$t_k(r,0)=t_0;$$
$$m_k(r,0)=m_0;$$
$$u_k(r,0)=0;$$

и при граничных условиях

$$t_n(R_n(\varphi),\tau)+\frac{\lambda_n}{\alpha_n}\frac{\partial t_n(R_n(\varphi),\tau)}{\partial r}=P_n(\varphi,\tau);$$
$$m_n(R_n(\varphi),\tau)+\frac{æ_n}{\beta_n}\frac{\partial m_n(R_n(\varphi),\tau)}{\partial r}=0;$$
$$U_n(R_n(\varphi),\tau)=U_0;$$
$$t_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)=t_k(R_k(\varphi),\tau)=P_{k-1}(\varphi,\tau);$$
$$m_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)=m_k(R_k(\varphi),\tau)=Q_{k-1}(\varphi,\tau);\kappa=2,...,n;$$
$$U_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)=U_k(R_{k-1}(\varphi),\tau);$$
$$t_1(R_0(\varphi),\tau)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\frac{\partial t_1(R_0(\varphi),\tau)}{\partial r}=P_0(\varphi,\tau);$$
$$m_2(R_1(\varphi),\tau)-\frac{æ_2}{\beta_2}\frac{\partial m_2(R_1(\varphi),\tau)}{\partial r}=0;$$
$$U_1(R_0(\varphi),\tau)=U_0;$$

с условиями полимеризации

$$t_I(\xi(\varphi,\tau),\tau)=t_{II}(\xi(\varphi,\tau),\tau)=t_{kp};$$
$$m_I(\xi(\varphi,\tau),\tau)=m_{II}(\xi(\varphi,\tau),\tau)=m_{kp};$$
$$U_I(\xi(\varphi,\tau),\tau)=U_{II}(\xi(\varphi,\tau),\tau);$$
$$t_{II}(a\xi(\varphi,\tau),\tau)=t_0;$$
$$m_{II}(a\xi(\varphi,\tau),\tau)=m_0;$$
$$U_{II}(a\xi(\varphi,\tau),\tau)=0;$$
$$\lambda_{k-1}\frac{\partial t_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)}{\partial r}=\lambda_k\frac{\partial t_k(R_{k-1}(\varphi),\tau)}{\partial r};$$
$$æ_{k-1}\frac{\partial m_{k-1}(R_{k-1}(\varphi),\tau)}{\partial r}=\partial\ell_k\frac{\partial m_k(R_{k-1}(\varphi),\tau)}{\partial r};$$

при $R_k(\varphi)\neq\xi(\varphi,\tau);$

$$\lambda_I\frac{\partial t_I(\xi(\varphi,\tau),\tau)}{\partial r}-\lambda_{II}\frac{\partial t_{II}(\xi(\varphi,\tau),\tau)}{\partial r}=\sigma\frac{d\xi(\varphi,\tau)}{d\tau};$$
$$æ_I\left[\frac{\partial m_I(\xi(\varphi,\tau),\tau)}{\partial r}+\Gamma\delta\frac{\partial t_I(\xi(\varphi,\tau),\tau)}{\partial r}\right]-$$
$$-æ_{II}\left[\frac{\partial m_{II}(\xi(\varphi,\tau),\tau)}{\partial r}+\Gamma\delta\frac{\partial t_{II}(\xi(\varphi,\tau),\tau)}{\partial r}\right]=g.$$

При решении этой задачи использован метод изотермических поверхностей.