Яремко Н.Н. Элементы теории катастроф в курсе математики для студентов экономических специальностей. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей IX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2009. – С. 17-24.

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Н.Н. Яремко

Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза, Россия

В статье рассматривается применение теории катастроф в качестве математического аппарата для изучения экономических процессов.

**Yaremko N.N. The elements of the catastrophe theory in studying mathematics for the students of economic specialities.**

The article is devoted to the application of the catastrophe theory as mathematical apparatus for studying the economic processes.

В начале XXI века П.И. Пидкасистый [1] определяет процесс обучения «как процесс активного целенаправленного взаимодействия между обучающим и обучаемым, в результате которого у обучающегося формируются определенные знания, умения, навыки, опыт деятельности и поведения, а также личностные качества». Процесс обучения в высшей школе имеет свою специфику. При сходстве с основной структурой дидактического процесса он обнаруживает свойства, основанные на следующих позициях:

вузовское обучение представляет собой профессиональное обучение;

вузовское обучение осуществляется в таких учебных заведениях, которые являются и исследовательскими учреждениями;

вузовское обучение осуществляется в особых формах организации преподавания и обучения.

В соответствии с высказанными положениями обучение высшей математике на экономическом факультете должно иметь профессиональную направленность, соответствовать современному уровню знаний, демонстрировать прикладное значение математики во многих важных содержательных вопросах, подчеркивать роль математики как эффективного и практического средства познания мира.

Теория катастроф в настоящее время – мощный новый математический аппарат, имеющий широкую область практического применения. Особенности, бифуркации, катастрофы – термины, описывающие основные понятия этой теории. Катастрофа в данной теории означает «скачкообразное изменение, возникающее в виде внезапного ответа системы на малые изменения условий» [2].

При изучении курса высшей математики на экономическом факультете математический материал следует сопровождать экономическими интерпретациями как из теоретической, так и из практической части экономической науки. Вполне естественно рассмотрение в курсе высшей математики практических фактов и теоретических моделей из экономики с точки зрения теории катастроф [2], несмотря на то, что имеется отдельный курс математико-экономических методов. В данном случае пропедевтическое введение понятий и элементов этого курса вполне оправданно. Еще одним аргументом в пользу рассмотрения элементов теории катастроф является тот факт, что мировая экономическая система после сентября 2001 г. проявляет признаки неустойчивости. Таким образом, становится актуальным знакомить студентов с основными понятиями теории катастроф в рамках курса высшей математики. Теория систем, теория катастроф, синергетика, структурная устойчивость функции, устойчивость системы с точки зрения флуктуаций, т.е. малых возмущений, естественным образом иллюстрируются в курсе математики. При этом аппаратом исследования экономических процессов или явлений служат нелинейные системы, которые в отличие от линейных дают более богатые возможности для прогнозирования, позволяют предсказывать события, в частности, катастрофы, не поддающиеся описанию линейными моделями.

Привлечение к изучению математики элементов теории катастроф не потребует дополнительных временных затрат, «надо только пожелать при изложении материала сделать нужные методологические оценки, привлечь практические примеры» [3]. Мы считаем, что на экономическом факультете допустимо приведение практических примеров для иллюстрации изучаемых понятий, при этом формальные доказательства, строгие обоснования можно опустить, добиваясь от студентов понимания сути дела. «Ознакомление с математическими темами (в том числе и с теорией катастроф), составляющими современное представление о «нелинейном мире», не только обогатит сам курс математики, сделает его современным, но и продемонстрирует ее роль как универсального языка исследований природы и общества, поможет формированию мировоззренческих представлений у молодежи» [3].

С основными понятиями теории катастроф можно познакомить студентов во вводной части лекции, предваряющей изучение математического анализа, или рассмотреть эти вопросы в теме «Непрерывность функции». Обратить внимание студентов на тот факт, что математическое описание мира основано на взаимодействии и взаимообогащении непрерывного и дискретного. Математический анализ чаще всего имеет дело с непрерывными, дифференцируемыми величинами, когда малым изменениям аргумента соответствуют малые изменения функции. Но именно скачки в развитии, когда малым изменениям независимых переменных величин соответствуют значительные изменения исследуемых величин, так называемые «катастрофы» представляют особый интерес. При первых признаках катастрофы она становится неотвратимой, и малые возмущения, малые предвестники катастрофы могут быть преодолены путем неимоверных усилий регулирования. Как определить ту последнюю каплю, которая переполняет чашу? Как увидеть те малые изменения, которые могут играть роль зародыша нового состояния? Как определить тот момент, когда в системе, уже достигшей высокой степени неравновесности и нестабильности, потенциально готовой к скачку, он мгновенно инициируется возникшим малым возмущением? Катастрофические падения курсов акций, развитие инфляции вплоть до гиперинфляции и кризиса, единомоментное изменение экономического курса (переход от плановой экономики к рыночной, январь1992 г.) уже не могут быть описаны непрерывными величинами. С точки зрения математики это скачки, разрывы, особенности, изучением которых и занимается математика. Вблизи особой точки экономика наиболее чутко реагирует на все воздействия: даже малые плавные изменения могут вызвать катастрофу.

Обратимся к конкретным примерам, дадим необходимые ссылки и методические рекомендации. Приведем известные математико-экономи-ческие факты и модели и дадим их трактовку с точки зрения теории катастроф.

**Пример 1**. Кривые спроса и дохода [4, с.135].

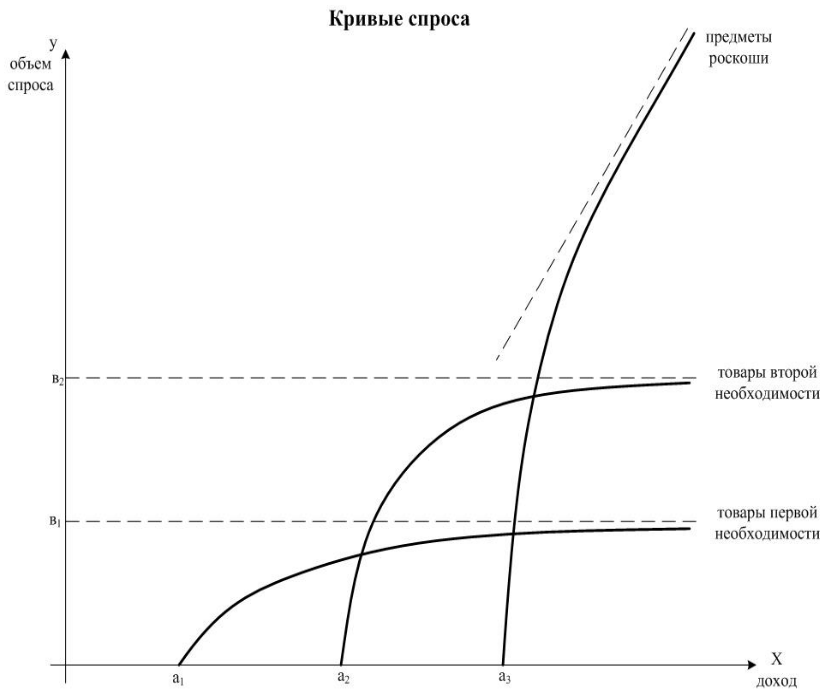
Функция Торнквиста, которая моделирует связь между величиной дохода $x$ и величиной спроса $y$ на различные товары (рисунок), имеет вид:

$$y = \frac{b_1\left(x - a_1\right)}{x - c_1}, \left(x > a_1\right),$$

$$y = \frac{b_2\left(x - a_2\right)}{x - c_2}, \left(x > a_2\right),$$

$$y = \frac{b_3 x\left(x - a_3\right)}{x - c_3}, \left(x > a_3\right).$$

Здесь $a_1, a_2, a_3$ уровни доходов, при которых начинается приобретение тех или иных товаров; $b_1, b_2$ – уровни насыщения для групп товаров первой и второй необходимости. Первая функция описывает потребление товаров первой необходимости, вторая – второй, третья характеризует потребление предметов роскоши.




В рассматриваемой модели «доход-спрос» значения параметров $a_1, a_2, a_3$ с точки зрения теории катастроф есть бифуркационные значения, так как любая флуктуация вблизи этих значений приводит к качественно новому характеру потребления.

**Пример 2.** Паутинообразная модель [5, с.201].

Рассмотрим случай линейных функций спроса и предложения:

$$S(p) = A + Bp_{i-1}, \quad D(p) = C - Ep_i ,$$

здесь $p_i$ – текущая цена; $p_{i-1}$ – цена в предшествующий момент времени; $D$ – предложение товара; $S$ – спрос; *A,B,C,E* – некоторые положительные константы. Уравнение, описывающее динамику такой системы, имеет вид:

$$D(p_i) = S(p_{i-1}).$$

Предложение товара в текущем периоде определяется на основе цен, сложившихся в предшествующем периоде. Перейдем к анализу модели. Выразим $p_i$ через $p_{i-1}$:

$$p_i = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} p_{i-1}.$$

Последовательно применяя это соотношение, находим

$$p_i = \frac{C-A}{E}\left[1 - \frac{B}{E} + \left(\frac{B}{E}\right)^2 + \ldots + (-1)^{i-1}\left(\frac{B}{E}\right)^{i-1}\right] +$$

$$+ p_{i-1}(-1)^i \left(\frac{B}{E}\right)^i p_0.$$

При $\frac{B}{E} < 1$ будем иметь: $p_i \to \frac{C-A}{B+E} = p^*$. Это означает, что при более крутом наклоне кривой предложения, чем кривой спроса ($B < E$), равновесие спроса и предложения является устойчивым. Если $\frac{B}{E} > 1$, т.е. более крутой является кривая спроса, то $\left(\frac{B}{E}\right)^i \to \infty$ и процесс расходится (равновесие неустойчиво). При $\frac{B}{E} = 1$, т.е. при $B = E$, значения $p_i$ колеблются вокруг равновесного значения. Таким образом, значение E, равное B, является бифуркационным значением, так как при переходе через это значение система радикально перестраивается.

**Пример 3.** Непрерывность функции, точки разрыва.

Флуктуации, или незначительные, случайные возмущения в системе, играют, согласно моделям синергетики, тройственную роль, см.[6]. Во-первых, они могут выступать как нейтральный фон, ровное взаимно уравновешенное мерцание всей массы внешних помех и внутренних шумов системы, не вносящее в систему заметных отклонений. Даже крупная флуктуация, если она не превысила некоторого порогового значения, гасится всей остальной массой «спокойных» атомов или молекул. Во-вторых, флуктуации могут играть роль зародыша нового состояния: при благоприятных условиях отдельная флуктуация способна вызвать разрастание островка неоднородности и нарастающее, кумулятивное усиление возмущения, последствием чего может быть закрепление такого возмущения внутри системы и готовность к изменению состояния всей системы. Если превышен порог чувствительности системы, воздействие отдельной флуктуации делается ощутимым и способным при благоприятных обстоятельствах раскачать систему и «свергнуть» ее наличное состояние. В-третьих, флуктуация может играть роль спускового крючка или «последней капли», когда в системе, уже достигшей высокой степени неравновесности и нестабильности, потенциально готовой к скачку, он мгновенно инициируется возникшим возмущением. Это явление называют феноменом самоорганизованной критичности.

Обратимся теперь к экономике. Катастрофические падения курсов акций на нью-йоркской фондовой бирже, происходящие нечасто, но систематически (наиболее известным был крах 1929 г., его ослабленные повторения произошли, в частности, в 1987 и 1998 г.), очень хорошо описываются синергетической моделью разрастающихся флуктуаций. Приток нежелательной информации ведет к резкому сбросу и соответственно падению цен акций всего нескольких крупных компаний, однако такой сброс вызывает возрастающую панику среди брокеров, которые всегда болезненно чувствительно воспринимают любые колебания рынка, высказывания ответственных государственных финансовых чиновников и даже непроверенные слухи о делах фирм, – и к концу торгового дня лавинообразно катятся вниз цены акций многих тысяч иных, вполне благополучных компаний, а с ними и показатели всей биржи. Немаловажно здесь и само ожидание катастрофы, фактор самосбывающегося пророчества. В октябре 1998 г. нью-йоркские брокеры с каким-то странным и упорным суеверием стали ожидать повторения катастрофического падения курсов акций 1987 г. которое тогда случилось тоже в октябре. (Не забудем, летом 1998 г. сильно зашатались азиатские фондовые рынки, и успела произойти банковская катастрофа в России.) И что же? Падение на нью-йоркской фондовой бирже произошло! Цены в среднем упали на крайне ощутимые для привыкших к стабильности американцев – 20%. Правда, американская экономика оказалась столь устойчивой, что через полгода показатели снова взмыли вверх.

При первых признаках катастрофы она становится неотвратимой и малые возмущения, малые предвестники катастрофы могут быть преодолены путем неимоверных усилий регулирования.

Приведенный материал примера 3 может быть использован для вводной лекции по математике: математика как инструмент для изучения реального мира.

**Пример 4.** Непрерывность функции: малым изменениям аргумента соответствуют малые изменения функции. Если рассмотреть изменение курса доллара, то при этом роль аргумента играет время, роль функции – курс доллара. В августе 1998 г. наблюдался рост курса доллара в 4 раза за небольшой промежуток времени, с математической точки зрения этот процесс представляет собой бесконечный рост, разрыв.

Через резкую неустойчивость и хаотичность точки бифуркации национальная экономика может перейти от равновесного состояния к равновесному (т.е. от закрытости к закрытости, но изменив параметры), от равновесия к неравновесию (закрытая прежде экономика становится открытой), от неравновесия к равновесию (открытая экономика превращается в закрытую) и от неравновесия к неравновесию (открытая экономика выбирает среди других путей развития в рамках открытости). Хаос творит новый экономический «порядок», новый путь развития служит средством перехода на иную траекторию развития, являясь, таким образом, своеобразной платой за возможность развития, данью, уплачиваемой природе экономики за вероятный, но не всегда осуществимый прогресс. Вблизи точки бифуркации экономика наиболее чутко реагирует на все воздействия: даже малые флуктуации могут вызвать серьезные изменения, поэтому адаптационный период является одним из наиболее важных для экономического развития, так как от полноты адаптации зависит жизнь страны в течение десятилетий. Одновременно это и наиболее сложный период, поскольку неопределенность и вероятность ошибки здесь очень велика.

В условиях экономической нестабильности элементами стабилизации рынка являются фьючерсные и форвардные сделки, минимизация рисков, страхование, создание резервного валютного фонда.

Мы придерживаемся той позиции, что в содержание математического образования, кроме предметных знаний, должны быть включены действия, адекватные математическим понятиям, теоремам, задачам, общенаучные методы познания, а также специальные эвристические приемы и различные эвристики [7, с. 30]. При изучении понятий отмечается важность овладения студентами действиями распознавания, отыскания следствий, переосмысления объекта с точки зрения других понятий. Деятельность по решению задач имеет сложный состав, она адекватна самой структуре задачи и включает логические, эвристические действия, действия контроля и самоконтроля, учебные действия.

При введении элементов теории катастроф в курс высшей математики студентам предстоит освоить следующее: распознавать точки бифуркации и «катастрофы», экономически трактовать математические термины, факты и полученные результаты, использовать характеристические свойства понятий теории катастроф. Можно отметить этапы в формировании этих действий: вначале студенты работают по образцу, предложенному преподавателем, затем самостоятельно, а далее осуществляют перенос этих действий в новые условия для решения и формулировки новых задач. Первые примеры из теории катастроф предлагаются преподавателем, возможно, не для самостоятельного решения студентами, а лишь как иллюстрация учебного математического материала. Далее можно предложить студентом доклад или реферат по выбранной тематике. К концу курса целесообразно проведение студентами самостоятельного исследования с целью отбора экономико-математического материала, в котором теория катастроф может служить математическим аппаратом изучения экономических процессов.

Библиографический список

1. Педагогика / под ред. П.И. Пидкасистого. – М. : Пед. общ-во России, 2002. – 608 с.

2. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 128 с.

3. Розов Н.Х. Курс математики общеобразовательной школы: сегодня и послезавтра // Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации : Материалы Всерос. науч.-практ. конф., посвящ. 115-летию чл.-кор. АПН СССР П.А. Ларичева. – Вологда : Русь, 2007. – С. 6 – 12.

4. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2000. – 472 с.

5. Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике. – М. : ДиС, 1999. – 368 с.

6. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – М. : КомКнига, 2005. – 312 с.

7. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики. – Саранск : Красный Октябрь, 1999. – 52 с.