Земскова Ю.Н. Решение эллиптического уравнения методом конечных элементов на радиально – базисных нейронных сетях. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей IX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2009. – С. 65-68.

РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА РАДИАЛЬНО-БАЗИСНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ[1]

Ю.Н. Земскова

Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза, Россия

Впервые предложено использование радиально-базисных нейронных сетей на конечных элементах в применении к двумерным задачам математической физики.

Zemskova J.N. Solution of elliptical equation with finite element method on radial-basis neural network.

For the first time the employment of radial-basis neural networks on finite element is offered in application to 2d tasks of mathematical physics.

Целью данной работы является рассмотрение нового подхода к реализации метода конечных элементов на нейронных сетях. Новый подход рассматривается в применении к задачам эллиптического типа. Расчётная область $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$, в которой решается краевая задача

$Lu + p = 0$ в Ω;

$Bu + q = 0$ на Γ,

где L и B – линейные дифференциальные операторы; p, q – известные функции независимых переменных, разбиваются на конечные элементы. По формулам [1] находится функциональная невязка. Главная задача – найти коэффициенты линейной комбинации, которой аппроксимируется решение в данной точке. Чтобы найти эти коэффициенты, которые с заданной точностью удовлетворяют уравнению невязки, можно использовать градиентные алгоритмы обучения нейронной сети [2, 3].

В данном исследовании используется радиально-базисная функция, аналогичная базисным функциям одного из бессеточных методов [4, 5 ,6],

$$R_{i,j}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(x-x_i)^2/(2c^2)} - e^{-r_1^2/(2c^2)}}{1 - e^{-r_1^2/(2c^2)}} \cdot \dfrac{e^{-(y-y_j)^2/(2d^2)} - e^{-r_2^2/(2d^2)}}{1 - e^{-r_2^2/(2d^2)}}, & |x - x_i| \le r_1 \wedge |y - y_j| \le r_2, \\ 0, & |x - x_i| \le r_1 \vee |y - y_j| \le r_2. \end{cases}$$

[1] Работа выполнена по тематическому плану научно-исследовательских работ Пензенского государственного педагогического университета, проводимых по заданию Федерального агентства по образованию.

Эти функции ассоциируются с узлами разбиения области решения краевой задачи. Узлы разбиения равномерно расположены на расстоянии *c* и *d*. Данные функции компактно поддерживаемы в области $\left[r_1 \times r_2\right]$. Точки обучающего множества берутся внутри получившихся областей, а также добавляются сами узлы разбиения.

Идея, описанная выше, апробировалась при решении эллиптического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f\left(x, y\right),\left(x, y\right)\in\Omega$$

с граничными условиями первого рода

$$\alpha\, u\big|_{\Gamma}=\varphi\left(x, y\right),\left(x, y\right)\in\Gamma .$$

В частности,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\sin\left(\pi\cdot x\right)\cdot\sin\left(\pi\cdot y\right),\left(x, y\right)\in\left(0{,}1\times 0{,}1\right), \qquad (1)$$

$$\alpha\, u\big|_{x=0,y\in[0,1]}=0,\ \alpha\, u\big|_{x=1,y\in[0,1]}=0,\alpha\, u\big|_{y=0,x\in[0,1]}=$$
$$=0,\alpha\, u\big|_{y=1,x\in[0,1]}=0,\alpha=1. \qquad (2)$$

Аналитическое решение данной задачи

$$z\left(x, y\right)=-\frac{1}{2\pi^2}\sin\left(\pi\cdot x\right)\cdot\sin\left(\pi\cdot y\right).$$

Параметр $r_1=4c,\ r_2=4d$.

Область определения задачи разбивалась на различное количество элементов.

На рис.1, 2 представлен график решения задачи (1) – (2), график разности аналитического решения с полученным. При увеличении количества нейронов ошибка по области уменьшается. Это говорит о работоспособности метода.

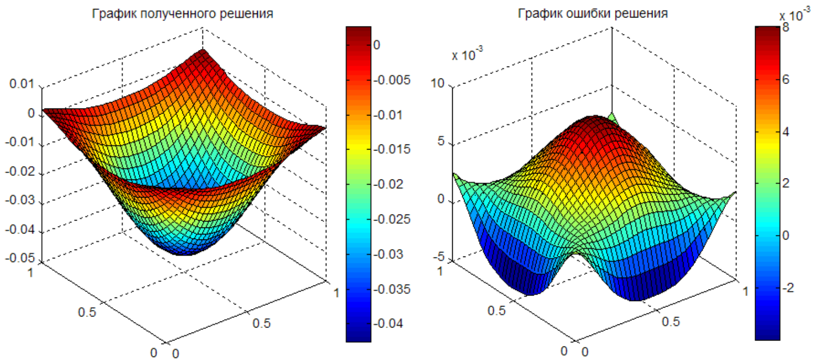

Рис. 1. График полученного решения и ошибки при 25 нейронах и 49 обучающих точках внутри конечного элемента

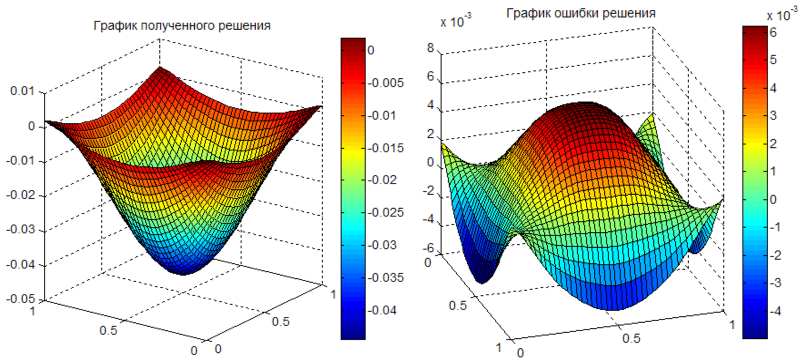

Рис. 2. График полученного решения и ошибки при 36 нейронах и 49 обучающих точках внутри конечного элемента

Данный метод пригоден для аппроксимации решения ДУЧП на двумерной плоскости. Он более прост в применении, так как не требует интегрирования элементов и ансамблирования матрицы. Но для его эффективности необходимо разработать более совершенный алгоритм обучения. Кроме того, возможность применения его для 3 D и параболических задач ещё не исследована.

Библиографический список

1. Формалёв В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. : Физматлит, 2004. – 400 с.

2. Оссовский С. Нейронные сети для обработки информации. – М. : Финансы и статистика, 2002. – 344 с.

3. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. – М. : Вильямс, 2006. – 1104 с.

4. Fries T.-P., Matthies H.-G. Classification and Overview of Meshfree Methods // Institute of Scientific Computing Technical University Braunschweig Brunswick, Germany, 2004. P. 64

5. Liu G.R. Mesh free methods moving beyond the finite element method. CRC PRESS LLC, 2003. P. 693

6. Liu G.R., Gu Y.T. An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming. – Springer, 2005. – 479 p.