

Эйрих С.Н. Исследование имитационной нормализации на примере решения систем линейных алгебраических уравнений. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей IX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2009. – С. 74-76.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ИМИТАЦИОННОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.Н. Эйрих

Тольяттинский государственный университет,  
г. Тольятти, Россия

Рассматривается оригинальная версия алгоритма имитационной нормализации для решения систем линейных алгебраических уравнений. Основное внимание уделяется исследованию алгоритма. Методами вычислительного эксперимента выбираются параметры алгоритма, дающие «хорошие» решения.

### **Eirikh S.N. The investigation of simulative normalization by the example of solving a system of linear algebraic equations.**

The article deals with the original version of simulation normalization algorithm to solve the system of linear algebraic equations. The main attention is paid to the investigation of the algorithm. The methods of computer-oriented experiment are the parameters, which give «good» solutions.

Решение ряда задач математической физики (задачи гидрогазодинамики, расчета электромагнитных полей, уравнения Максвелла, Навье-Стокса и др.) методами конечных элементов (FEM) и конечных объемов (FVM) – особенно на неструктурированных сетках – приводит к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными матрицами большой размерности, которые, как правило, являются несимметричными [1].

Целью настоящей работы являются исследование и реализация алгоритма имитационной нормализации, использующего метод обобщенных минимальных невязок GMRES [2] для вычисления оценки решения.

Обоснованием выбора имитационной нормализации служили следующие соображения: алгоритм надежен и может применяться почти для всех задач комбинаторной оптимизации; благодаря стохастическому критерию принятия решений и ненулевой вероятности принятия ухудшенных решений алгоритм не попадает в локальные оптимумы.

Основными сложностями применения имитационной нормализации для решения рассматриваемой задачи является выбор параметров: окрестность, отношение сопредельности, график охлаждения (функции начальной температуры и останова).

Основной рассматриваемой задачей будет являться получение решения СЛАУ  $Ax = b$ , где  $A$  – невырожденная матрица размерности  $m \times n$ , а  $x$  и  $b$  – векторы размерности  $n \times 1$ , составленные из действительных коэффициентов.

В силу невырожденности матрицы  $A$  существует некоторое точное решение  $x^* = A^{-1}b$ . Задача получения решения СЛАУ сводится к нахождению  $x^*$ . Невязкой [3],

соответствующей вектору  $x$ , будем называть вектор  $\Delta x = b - Ax = A(x^* - x)$ , где  $(x^* - x)$  есть ошибка решения [3].

На начальном этапе исследований, легших в основу настоящей работы, были обобщены современные знания об имитационной нормализации. Далее были проведены практические исследования, направленные на реализацию алгоритма имитационной нормализации и его настройку на решение СЛАУ. Так же на языке C++ была разработана программа для решения СЛАУ больших размерностей.

Термин имитационная нормализация (в английской литературе «simulated annealing») в русской литературе часто применяется в других вариантах – «эмуляция отжига», «метод отжига», «имитация отжига», «симуляция восстановления». Применение термина «имитационная нормализация» правильное с точки зрения физики.

Алгоритм можно представить следующей схемой [4]:

1. Задать начальное корректное решение  $X^0$  и считать его текущим ( $X=X^0$ ).
2. Задать начальную температуру  $T_0$  и считать её текущей ( $T=T_0$ ).
3. Применить операцию мутации решения к текущему решению  $X$  и получить новый корректный вариант решения  $X'$ .
4. Найти изменение целевой функции  $\Delta f = f(X') - f(X)$ :
  - если  $\Delta f \leq 0$  (решение улучшилось), то новый вариант решения считать текущим ( $X=X'$ ), к п.5;
  - если  $\Delta f > 0$  (решение ухудшилось), то принять с вероятностью  $p = e^{-\frac{\Delta f}{T}}$  в качестве текущего решения новый вариант решения  $X'$ , к п.5.
5. Вызвать функции изменения текущей температуры.
6. Если не выполнен критерий останова, то перейти к п.3.

Основным результатом работы можно считать исследования, сделанные в ходе настройки алгоритма на особенности задачи. На первом шаге алгоритма решения задаются произвольно, но с условием того, что элементы не превышают максимального по модулю элемента матрицы  $A$  и вектора  $b$ , т.е. элементы вектора решения выбираются из интервала  $(-\max(A, b); \max(A, b))$ . Эвристика ограничения выбора разработана и реализована для того, чтобы повысить вычислительную мощность алгоритма и обеспечить быструю сходимость. На третьем шаге алгоритма мутирует произвольный элемент решения, его значение выбирается также эвристикой ограничения выбора. Для выбора начальной температуры сначала выбирается произвольная  $T$ . Далее, после выбора некоторого соседнего состояния  $X'$ , увеличиваем  $T$  таким образом, чтобы  $X'$  можно было принять с вероятностью 1. Делая так, для 500 первых шагов получаем приемлемое  $T_0$ . После каждых  $d = n$  шагов значение  $T$  умножается на  $r = 0,87$ , т.е. график охлаждения  $T_i := r \cdot T_{i-1}$ . Параметры выбраны на основе исследования, которое проводилось методом проб.

По методу обобщенных минимальных невязок получаем функцию для вычисления коэффициентов ошибки решений в следующем виде:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} * x_j - b_i \right| \rightarrow \min .$$

Итак, учитывая полученные результаты, можно заключить, что изучение алгоритма, в частности решение СЛАУ, полностью не завершено, но начато успешно. Данная работа рассчитана на продолжение исследований в этом

направлении, целью которых является построение эффективных эвристических алгоритмов для задач комбинаторной оптимизации.

#### Библиографический список

1. Natarajan R. Finite element applications on a shared-memory multiprocessor: algorithms and experimental results. *Ibid.*, 94, 1991, 352–381.
2. Aspects of Computational Science. Stichting Nationale Computer Faciliteiten, The Netherlands, 1995.
3. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М. : Наука, 1977. – 304 с.
4. Hromkovic J. Algorithms for Hard Problems. – Springer, 2003.