Косников Ю.Н., Надеев А.И. Математическое моделирование геометрических объектов в системах компьютерной графики. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей IX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2009. – С. 95-97.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ

Ю.Н. Косников, А.И. Надеев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Предлагается построение и визуализацию математической модели пространственного объекта проводить в два этапа. На первом этапе выполняется интерполяция поверхности объекта на основе радиальных базисных функций и последующая регуляризация поля опорных точек. На втором этапе осуществляется переход к модели, удобной для визуализации объекта стандартными средствами графической системы.

Kosnikov U.N., Nadeev A.I. Mathematical modelling of geometric objects in systems of computer graphics.

The building and visualization of mathematical model of spatial object is to be carried out in two stages. The first stage includes the interpolation of the object’s surface on the basis of radial functions followed by regularization of reference point’s field. The second stage includes the transfer to the model, which is comfortable for object’s visualization by using standard means of graphic system.

Объекты отображения в системах компьютерной графики часто задаются множеством неравномерно расставленных характерных (опорных) точек, принадлежащих поверхности этих объектов. Так представляются, например, результаты пространственного сканирования предметов, топографической съемки местности, замеров физической величины набором датчиков. В связи с этим возникает задача построения и визуализации математических моделей пространственных объектов. Предлагается построение и визуализацию математической модели пространственного объекта проводить в два этапа. На первом этапе выполняется регуляризация поля опорных точек, на втором – переход к модели, удобной для визуализации объекта стандартными средствами.

На первом этапе эффективно применяется аппарат радиальных базисных функций (РБФ). С помощью РБФ происходит интерполяция выходной поверхности между опорными точками. Каждая опорная точка вносит в координаты текущей точки поверхности определенный вклад. Общеупотребительным представлением неаналитической поверхности на основе РБФ является ее уравнение в общей форме:

$$\sum_{i=\mathbf{1}}^{N} \lambda_i F\left(r_i\right) = 0, \tag{1}$$

где r_i – расстояние в пространстве от текущей точки поверхности до i-й опорной точки (x_i, y_i, z_i) : $r_i = \sqrt{\left(x-x_i\right)^2 + \left(y-y_i\right)^2 + \left(z-z_i\right)^2}$; $F(r_i)$ – РБФ, определяющая характер интерполяции; λ_i – коэффициент влияния (весовой коэффициент), задающий вклад координат i-й опорной точки в координаты текущей точки; N – количество опорных точек.

Для нахождения N коэффициентов λ_i составляется система из N уравнений, каждое из которых соответствует прохождению поверхности через известную характерную точку. Современные программные пакеты математического назначения позволяют решать системы уравнений достаточно большой размерности и находить коэффициенты λ_i. Однако вычисление промежуточных точек выходной поверхности по ее неявному описанию (1) является весьма трудоемким делом и требует специальных алгоритмов.

Модель на основе РБФ строится наиболее просто, если зоны влияния опорных точек на текущую точку выходной поверхности определяются не в трехмерном пространстве, а на поверхности аргументов (исходной поверхности). Если результат моделирования предполагается в виде незамкнутой выходной поверхности, то в качестве исходной поверхности выбирается плоскость. Если же опорные точки описывают замкнутую выходную поверхность, то в качестве исходной поверхности выбирается криволинейная аналитическая фигура, например эллипсоид. В первом случае для моделирования используются декартовы координаты, во втором – сферические. При таком подходе математическое описание поверхности представляет собой явную функцию двух аргументов, например, для незамкнутой поверхности

$$z=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i F\left(x_i,y_i\right), \tag{2}$$

где $F(x_i,y_i)$ – РБФ, зависящая от расстояния $r\left(x_i,y_i\right)$ между проекциями текущей и i-й опорной точек на исходную плоскость: $r\left(x_i,y_i\right)=\sqrt{\left(x-x_i\right)^2+\left(y-y_i\right)^2}$.

В модели (2) зона влияния опорной точки лежит на исходной поверхности.

Форма представления (2) имеет ограничение: выходная поверхность должна быть однозначной. Для описания многозначной поверхности нужно использовать параметрическую форму описания:

$$x=\sum_{i=1}^{N}\lambda_{xi} F\left(u_i,v_i\right),$$

$$y=\sum_{i=1}^{N}\lambda_{yi} F\left(u_i,v_i\right),$$

$$z=\sum_{i=1}^{N}\lambda_{zi} F\left(u_i,v_i\right),$$

где u_i,v_i – параметрические координаты i-й опорной точки; $F(u_i,v_i)$ – РБФ, зависящая от расстояния $r\left(u_i,v_i\right)$ между текущей и i-й опорной точками на поверхности аргументов-параметров u,v: $r\left(u_i,v_i\right)=\sqrt{\left(u-u_i\right)^2+\left(v-v_i\right)^2}$; $\lambda_{xi},\lambda_{yi},\lambda_{zi}$ – коэффициенты влияния опорной точки на текущую точку по координатам x,y,z.

Модель на основе РБФ используется для определения новых опорных точек. Они расставляются в узлах топологически ортогональной координатной сетки. Шаг расстановки выбирается в соответствии с желаемой точностью моделирования. Второй этап моделирования завершается построением модели, пригодной для эффективной визуализации. Это может быть полигональная модель с малым шагом между вершинами полигонов. Ее визуализация осуществляется штатными средствами графической системы.

Математические модели, построенные с помощью РБФ, обладают двумя основными свойствами: прохождение через все опорные точки и гладкость. Погрешность предлагаемого подхода к моделированию пространственных объектов с использованием явной формы описания (2) сравнима с погрешностью кубического сплайна. Для расчета погрешности использовалась тестовая функция Франке, для которой средняя арифметическая погрешность составила 3%.