Баланян С.Т., Ашурков П.А. Развернутая форма функционала для оптимизации качества управления. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей IX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2009. – С. 113-116.

# РАЗВЕРНУТАЯ ФОРМА ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

С.Т. Баланян, П.А. Ашурков

Военный авиационный инженерный университет,
г. Воронеж, Россия

Выводится развернутая форма функционала для оптимизации качества управления. Анализируется применимость калмановской и оптимальной фильтраций.

**Balanyan S.T., Ashurkov P.A. Large-scale form of functional for optimization the quality of education.**

A large-scale form of functional for optimization the quality of education is deduced. The application of Kalman and optimal filtering is analysed.

Пусть объект управления (ОУ) описывается нелинейным дифференциальным уравнением с аддитивным шумом:

$$\dot{x} = f(x,a,u,t) + \xi_x, \tag{1}$$

где $x$ – вектор состояния ОУ размерности n; $u$ – вектор управления размерности m; $a$ – r-мерный вектор неизвестных параметров, который изменяется по закону $\dot{a} = \xi_a$, (здесь $\xi_x, \xi_a$ – векторные белые гауссовские шумы размерности n и r соответственно); $f$ – известная вектор-функция размерности n.

Для удобства введем расширенный вектор состояния

$$y^T = [x^T, a^T], \tag{2}$$

тогда уравнение ОУ примет вид

$$\dot{y} = g(y,u,t) + \xi, \tag{3}$$

где $g = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$; $\xi = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_a \end{bmatrix}$. При наличии измерений с учетом (2)

$$z = h(y,t) + \xi_z \tag{4}$$

вырабатываются оценки вектора расширенного состояния

$$\hat{y}^T = [\hat{x}^T, \hat{a}^T]. \tag{5}$$

По полученным оценкам определяется управляющее воздействие и таким образом, что при точном совпадении оценок $\hat{x}$ и $\hat{a}$ с истинными значениями $x$ и $a$ достигается минимум заданного функционала

$$\mathrm{I}(x(t), a(t), u(t); t \in [t_0, t_k]). \tag{6}$$

Будем считать, что выбор вида функционала при известных $f$, $h$ и параметрах шумов $\xi$, $\xi_z$ однозначно определяет выбор управляющего воздействия в любой момент времени, если заданы оценки $\hat{x}(t)$ и $\hat{a}(t)$, $t \in [t_0, t_k]$. В связи с этим определим вид функционала качества в данных условиях.

Теоретическое описание функционала. Поскольку алгоритм функционирования адаптивного управления задан почти полностью, не задано лишь правило формирования оценок вектора расширенного состояния $\hat{y}$, ясно, что функционал будет зависеть лишь от $\hat{y}(t), t \in [t_0, t_k]$. Причем

$$\min_{y(t), t\in[t_0, t_k]} \mathrm{I}(\hat{y}(t)) = \mathrm{I}(y(t), t \in [t_0, t_k]). \quad (7)$$

Если функционал $\mathrm{I}(\hat{y}(t))$ непрерывно зависит от $\hat{y}(t)$, то получим

$$\mathrm{I}(\hat{y}(t)) = \mathrm{I}(y) + \int_{t_0}^{t_k} \mathrm{A}(t)\Delta y(t)dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{t_k} \Delta y^T(t_1)\mathrm{B}(t_1, t_2)\Delta y(t_2)dt_1 dt_2, \quad (8)$$

существование пределов $\mathrm{A}(t)$ и $\mathrm{B}(t_1, t_2)$, их величина зависит от конкретного целевого функционала (ЦФ) управления и уравнения ОУ. Заметим, что $\mathrm{A}(t) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_k]$. В противном случае при достаточно малых $\Delta y(t)$ линейный член в (8) будет по модулю больше квадратичного, и надлежащим выбором знака $\Delta y(t)$ в каждый момент времени $t \in [t_0, t_k]$ можно добиться того, что $\mathrm{I}(\hat{y}) < \mathrm{I}(y)$. Это противоречит условию (7). По этой же причине матрица $\mathrm{B}(t_1, t_2), t_1, t_2 \in [t_0, t_k]$ должна быть неотрицательно определена:

$$\int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{t_k} \Delta y^T(t_1)\mathrm{B}(t_1, t_2)\Delta y(t_2)dt_1 dt_2 \geq 0. \quad (9)$$

Считаем, что потери качества управления из-за ошибок оценивания и идентификации с точностью до членов второго порядка малости по $\Delta y$ определяются выражением

$$\Delta \mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{t_k} \Delta y^T(t_1)\mathrm{B}(t_1, t_2)\Delta y(t_2)dt_1 dt_2, \quad (10)$$

где $\mathrm{B}(t_1, t_2)$ – в общем случае обобщенная положительно определенная (см.(9)) квадратная матрица, обладающая свойством

$$\mathrm{B}^T(t_1, t_2) = \mathrm{B}(t_2, t_1). \quad (11)$$

В общем случае $\Delta y(t)$ – случайный вектор, поэтому речь должна идти о математическом ожидании $\Delta \mathrm{I}$:

$$\mathrm{I} = \mathrm{M}(\Delta \mathrm{I}) = \frac{1}{2} tr\{\int_{t_0}^{t_k}\int_{t_1}^{t_k} \mathrm{B}_1(t_1, t_2)\mathrm{K}_y(t_2, t_1)dt_1 dt_2 + \int_{t_0}^{t_k} \mathrm{B}_2(t)D_y(t)dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_k} \mathrm{B}_{1k}(t)\mathrm{K}_y(t_k, t)dt + \mathrm{B}_k D_y(t_k)\}, \quad (12)$$

где $\mathrm{K}_y(t_2, t_1)$ и $D_y(t)$ – соответственно корреляционная и дисперсионная матрицы ошибок оценивания $\Delta y$:

$$\mathrm{K}_y(t_2, t_1) = \mathrm{M}\{\Delta y(t_2)\Delta y^T(t_1)\}, D_y(t) = \mathrm{K}_y(t, t). \quad (13)$$

В соответствии с этим выражение для потерь качества управления из-за ошибок оценивания примет окончательный вид:

$$\mathrm{I} = tr\{\int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{t_k} \mathrm{B}_{\mathbf{1}}(\tau,t)\mathrm{K}_y(t,\tau)dtd\tau + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k} \mathrm{B}_{\mathbf{2}}(t)D_y(t)dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k} \mathrm{B}_{\mathbf{1}k}(t)\mathrm{K}_y(t_k,t)dt + \frac{1}{2}\mathrm{B}_k D_y(t_k)\} \ . \qquad (14)$$

Функционал $\mathrm{I}$ подлежит минимизации путем выбора алгоритма оценивания, причем матрицы $\mathrm{B}_{\mathbf{1}}(\tau,t), \mathrm{B}_{\mathbf{2}}(t), \mathrm{B}_{\mathbf{1}k}(t), \mathrm{B}_k(t)$ считаются заданными, а матрицы $\mathrm{K}_y(t,\tau), D_y(t)$ варьируются при изменении алгоритма оценивания на интервале $t,\tau \in [t_{\mathbf{0},} t_k], \tau \le t.$ Можно утверждать, что если удается выразить зависимость функционала качества управления от оценок расширенного вектора состояния в виде

$$\mathrm{I}(\hat{y}(t), t \in [t_{\mathbf{0}}, t_k]) = \int_{t_0}^{t_k} G(\hat{y}(t), u(t), t)dt + G_k(\hat{y}(t_k), u(t_k)), \qquad (15)$$

а алгоритм управления сводится к виду

$$u = u(\hat{y}, t), \qquad (16)$$

где $G(\hat{y}, u, t)$ является функцией указанных переменных, а u – вектор-функция, то фильтр Калмана оптимален для этой системы в классе линейных по невязке фильтров, если ошибки достаточно малы. Стоит заменить в (16) функцию $u$ на оператор $u(\hat{y}(t), t \in [t_{\mathbf{0}}, t_k])$, как условие оптимальности фильтра Калмана нарушается.

Таким образом, калмановская фильтрация оптимальна для ограниченного класса ОУ и ЦФ, даже без учета вычислительных затрат и нелинейности системы. Оптимальная фильтрация оказывается сложнее калмановской и алгоритм ее зависит от ОУ и ЦФ. Это оправдывает отказ от использования фильтра Калмана в адаптивной оптимальной системе и разработку менее вычислительно емких квазиоптимальных алгоритмов идентификации и оценивания в интересах адаптивной оптимальной системы управления, которые наилучшим образом учитывали бы особенности конкретной системы управления.