Бойков И.В., Кучумов Е.В., Романова Л.Д. Приближенное решение интегральных уравнений на нейронных сетях. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей IX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2009. – С. 123-127.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

И.В. Бойков, Е.В. Кучумов, Л.Д. Романова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Предложен алгоритм приближенного представления многомерных интегралов интегралами от функций одной переменной. На основании этого алгоритма построены методы вычисления коэффициентов Фурье и решения интегральных уравнений на нейронных сетях.

Boykov I.V., Kuchumov E.V., Romanova L.D. Approximate method for solution of integral equations on neural sets.

Offered algorithm for approximate transformation multidimensional integrals, to onedimensional integrals. Using this algorithm offered method for evaluation Fourier coefficients and solution of integral equations on neural sets.

Решение задач математической физики на нейронных сетях является актуальной задачей, общей для вычислительной математики и вычислительной техники. Подробная библиография о методах решения дифференциальных уравнений на нейронных сетях содержится в монографиях [1, 2]. Наряду с решением дифференциальных уравнений представляет значительный интерес решение на нейронных сетях интегральных уравнений. Этому вопросу посвящено данное сообщение, в котором используются обозначения, описанные в [3].

Вначале рассмотрим способ вычисления коэффициентов Фурье на нейронных сетях.

Пусть функция $f(x_1,x_2)$ представима рядом Фурье

$$f(x_1,x_2)=c(0,0)+\sum_{\substack{k,l=-\infty\\(k,l)\neq(\mathbf{0},\mathbf{0})}}^{\infty} c(k,l)e^{i(kx_1+lx_2)}. \tag{1}$$

Умножим (1) на $e^{-i(nx_1+mx_2)}$. Имеем

$$f(x_1,x_2)e^{-i(nx_1+nx_2)}=c_{\mathbf{00}}e^{-i(nx_1+mx_2)}+\sum_{\substack{k,l=-\infty\\(k,l\neq\mathbf{0},\mathbf{0})}}^{\infty} c(k,l)e^{i((k-n)x_1+(l-m)x_2)}. \tag{2}$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} f(x_1,x_2)e^{-i(nx_1+mx_2)}dx_1dx_2=c(n,m)4\pi^2. \tag{3}$$

Возьмем два простых числа q_1, q_2 $(q_1\neq q_2)$ и сделаем в равенстве (2) подстановку $x_1=q_1t$ и $x_2=q_2t$. В результате получаем

$$f(q_1t,q_2t)e^{-i(nq_1+mq_2)t}=c_{00}e^{-i(nq_1+mq_2)t}+\sum_{\substack{k,l=-\infty\\(k,l)\neq(0,0)}}^{\infty}c(k,l)e^{i((k-n)q_1+(l-m)q_2)t}. \qquad (4)$$

Проинтегрируем равенство (4). Имеем

$$\int_0^{2\pi}f(q_1t,q_2t)e^{-i(nq_1+mq_2)t}=2\pi c(n,m)+2\pi\sum_{(k,l)=-\infty}^{\infty}{}'c(k,l), \qquad (5)$$

где $\sum'$ означает суммирование по $(k,l)\neq(n,m)$ и таким, что $(k-n)q_1+(l-m)q_2=0$.

Из формулы (5) следует, что

$$c(n,m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(q_1t,q_2t)e^{-i(nq_1+mq_2)t}dt-\sum_{(k,l)=-\infty}^{\infty}c_{kl}. \qquad (6)$$

Таким образом, погрешность вычисления коэффициентов Фурье по формуле

$$c(n,m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(q_1t,q_2t)e^{-i(nq_1+mq_2)t}dt+R_{nm}(f) \qquad (7)$$

оценивается неравенством

$$\left|R_{nm}\right|\leq\sum_{(k,l)=-\infty}^{\infty}{}'\left|c_{kl}\right|. \qquad (8)$$

Для оценки $\left|R_{nm}\right|$ необходимо выделить классы функций, на которых вычисляются коэффициенты Фурье. Пусть $f\in E_2^{\alpha}$. Тогда

$$\left|R_{nm}\right|\leq\sum_{(k,l)=-\infty}^{\infty}{}'\left|c_{kl}\right|\leq c\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\overline{c}(n-q_2\nu,m+q_1\nu)\leq c\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\overline{|n-q_2\nu|}\,\overline{|m+q_1\nu|})^{\alpha}},$$

где $\overline{|n-q_2\nu|}=\begin{cases}|n-q_2\nu|, \text{ если } |n-q_2\nu|\neq 0,\\ 1,\ |n-q_2\nu|=0.\end{cases}$

Предположим, что коэффициенты Фурье вычисляются в диапазоне значений $-N\leq n,m\leq N$. Тогда, взяв в качестве q_1 и q_2 простые числа $q_1,q_2\geq 2N$, получаем оценку $\left|R_{nm}\right|\leq\frac{c}{(q_1q_2)^{\alpha}}\leq\frac{c}{N^{2\alpha}}$ равномерно для всех $-N\leq n,m\leq N$.

Аналогичные оценки можно получить и для других классов функций. Не останавливаясь на этих оценках, отметим, что в случае функций l независимых переменных коэффициенты Фурье функции $f(x_1,...,x_l)$ вычисляются по формуле

$$c(n_1,n_2,...,n_l)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(q_1t,...,q_lt)e^{-i(n_1q_1+...+n_lq_l)}dt+R_{n_1...n_l}(f), \qquad (9)$$

погрешность которой оценивается на классе функций E_l^{α} неравенством

$$\left|R_{n_1...n_l}(f)\right|\leq\frac{c}{(q_1...q_l)^{\alpha}}.$$

Вычисление коэффициентов Фурье по формулам (7), (9) легко реализуется на машинах непрерывного действия. Для определенности остановимся на формуле (7). Для нахождения коэффициентов $c(n,m)$ достаточно реализовать решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\pi}f(q_1t,q_2t)e^{-i(nq_1+mq_2)t}$$
$$x(0)=0$$
и зафиксировать решение при $t=2\pi$.

Из предложенных выше способов вычисления коэффициентов Фурье следует возможность реализации на нейронных сетях решения интегральных уравнений методом вырожденного ядра.

Рассмотрим интегральное уравнение
$$x(t)+\lambda\int_{0}^{2\pi}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t), \tag{10}$$
где
$$f(t)\in\tilde{C}[0,2\pi],\ \ h(t,\tau)\in\tilde{C}[0,2\pi;0,2\pi].$$

Будем считать, что функция $h(t,\tau)\in C_2^{\alpha}$. (Возможны и другие условия, налагаемые на функцию $h(t,\tau)$. В частности, можно потребовать [3], чтобы $h(t,\tau)\in H_{\beta,\beta}$, $\beta>1/2$).

Вычислив коэффициенты Фурье функции $h(t,\tau)$, представим последнюю в приближенном виде
$$\underset{NN}{h(t,\tau)}=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N}h(k,l)e^{i(kt+l\tau)}.$$

Уравнение (10) аппроксимируется следующим
$$x(t)+\lambda\int_{0}^{2\pi}h_{NN}(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),$$
которое удобно представить в виде
$$x(t)+\lambda\sum_{k=-N}^{N}e^{ikt}\int_{0}^{2\pi}\sum_{l=-N}^{N}h(k,l)e^{il\tau}x(\tau)d\tau=f(t). \tag{11}$$

Введем обозначение
$$x(l)=\int_{0}^{2\pi}x(\tau)e^{il\tau}d\tau,$$
воспользовавшись которым и почленно умножая уравнение (11) на функции e^{ikt}, $k=-\overline{N,N}$, и интегрируя в пределах от 0 до 2π, приходим к системе уравнений
$$x(k)+\lambda 2\pi\sum_{l=-N}^{N}h(-k,l)x(l)=f(k),\ \ k=-\overline{N,N}. \tag{12}$$

Система (12) может быть решена на нейронных сетях методом последовательных приближений (при малых значениях λ) или другим итерационным методом. Отметим, что для решения операторных уравнений $Ax=f$ во многих случаях возможна реализация итерационного метода
$$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{2\left\|A^*A\right\|}(A^*Ax_n-A^*f),\ \ n=0,1,...,.$$

Библиографический список

1. Галушкин А.И., Судариков В.А., Шабанов Е.В. Нейроматематика: методы решения задач на нейрокомпьютерах // Математическое моделирование. – 1991. – Т.3. – №8. – С. 93 – 111.

2. Горбаченко В.И. Нейрокомпьютеры в решении краевых задач теории поля : учеб. пособие для вузов. – Кн. 10. – М. : Радиотехника, 2003. – 336 с.

3. Бойков И.В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. – 236 с.