Садовников Н.В. Задачи как средство фундаментализации методической подготовки учителя математики в педвузе. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей IX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2009. – С. 150-158.

ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ФУНДАМЕНТАЛИЗАЦИИ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ПЕДВУЗЕ

Н.В. Садовников

Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза, Россия

Рассматривается проблема использования математических задач как средство фундаментализации математической и методической подготовки учителя в педагогическом вузе.

Sadovnikov N.V. Tasks as means for fundamentalization of methodical grounding of mathematics teacher at pedagogical high school.

The article covers the problem of usage the mathematical tasks as means of fundamentalization of teacher’s mathematical and methodical grounding at the pedagogical institute.

На основании имеющегося педагогического опыта приходится, к сожалению, констатировать тот факт, что многие выпускники физико-математических факультетов педвузов (до 30%) не умеют решать сложные школьные математические задачи (особенно стереометрические задачи, задачи на комбинации геометрических фигур, текстовые алгебраические задачи). А ведь это будущие учителя, которые должны в скором времени сами обучать их решению. Многие учащиеся школ боятся даже браться за решение нестандартных школьных математических задач. И это несмотря на то, что и учащиеся, и студенты львиную долю времени занятий по математике решают различные задачи. Все это говорит о низкой эффективности методических подходов, используемых при обучении и учащихся, и студентов решению задач: ни в школе, ни в вузе стихийно не формируются знания и умения, необходимые для осознанного решения задач. Тем более без целенаправленной работы не могут формироваться у будущих учителей математики методические умения и навыки по обучению учащихся решению задач. Данное умение вполне можно считать *фундаментальным* (основополагающим) в методической подготовке учителя математики в педагогическом вузе. Поэтому на проблеме подготовки учителя к использованию задач в школьном курсе математики стоит остановиться поподробнее.

В истории использования задач в обучении математике можно выделить такие этапы: 1) изучение математики с целью обучения решению задач; 2) обучение математике, сопровождаемое решением задач; 3) обучение математике через решение задач.

Суть каждого этапа определяется целями обучения, возникающими новыми образовательными концепциями, целями математического образования в ту или иную историческую эпоху. Сущность первого этапа выражена в предисловии к «Арифметике» Л.Ф. Магницкого, где подчеркивается, что математику следует изучать для решения задач, главным образом задач на балансовые расчеты, купеческие сделки и т.п. Позже такое понимание роли математики сменилось акцентированием внимания на усвоении теоретического материала. При этом предметные методики должны заниматься поиском средств, приемов для лучшего овладения теоретическим материалом, а решение задач было именно таким средством.

Основные идеи третьего этапа были заложены в конце XIX века. Предполагалось сделать задачи точкой исхода преподавания, а не средством дрессировки учащихся в определенном направлении. Эта точка зрения нашла поддержку в документах международного математического конгресса, состоявшегося в 1966 г. в Москве. В его решениях, в частности, было отмечено, что решение задач – наиболее эффективная форма не только развития математической деятельности, но и усвоения знаний, навыков, методов и приложений математики.

В современных исследованиях по теории и методике обучения математике подчеркивается огромная роль задач и непосредственно в процессе изучения теории. При этом каждому этапу работы с понятием или теоремой выделены соответствующие виды упражнений, задач, реализующих их.

Помимо этого, задачи являются основным средством развития пространственного воображения, логического мышления, творческой деятельности школьников. В процессе решения задач формируются не только эвристическая, алгоритмическая составляющие мышления, но и многие нравственные качества учащихся.

В связи с изменением роли и места задач в обучении обновляются сами задачи. Вместо традиционных требований – «найти», «вычислить», «доказать», «построить» все больше в формулировке требования встречаются новые глаголы – объяснить, исследовать, выбрать, выделить, спрогнозировать и т. д. В методических исследованиях последних лет предпринимаются попытки определить критериальную основу для выбора эстетически привлекательной задачи. Ее составляют универсальность использования в различных разделах математики, продуктивность, максимальная емкость охвата объектов рассматриваемого типа, решение задачи с помощью интеграции различных методов. Все это характеризует новый этап использования задач в качестве средства математического образования. Реализация данного этапа происходит через задачи, решение которых требует интеграции знаний из различных областей образования, использования методов познания, конструирования новых способов обоснования, опровержения гипотез, прогнозирования результата, планирования исполнения, коррекции, оценки, развития темы задачи. Важной функцией задач является управление развитием школьника.

В психологической науке задача обычно характеризуется как особая форма познания реальной действительности, как объект, детерминирующий процесс мышления человека. Правомерность такой точки зрения очевидна. Ведь в процессе обучения школьникам и студентам предлагается решить немало задач, помещаемых в учебниках, сборниках задач, составленных учителем, преподавателем. На первый взгляд это множество задач существует независимо от тех, которым они предлагаются. Однако в действительности каждая задача становится задачей по существу лишь тогда, когда сам учащийся, студент «принимает» эту задачу, т.е. начинает работать над ее решением. Значит, задача в психологическом смысле берется в определенном отношении к человеку, она активизирует мышление, попытки ее решить занимают нас. Это «принятая» задача, в отличие от тех, которые по той или иной причине прошли мимо нас. Согласно принципу детерминизма внешние причины действуют через внутренние условия, при этом устанавливается определенное соотношение внутренних и внешних условий любого тела, явления, процесса. Внутренние условия, сложившись под воздействием внешних условий, определяют их активность, изменяя тем самым внешние условия, оказывая воздействие на них. Соотношение внешних и внутренних условий изменяется в ходе их взаимодействия. Принцип детерминизма лежит в основе построения теории задач, изложенной в работах В.И. Крупича. Задача как объект мыслительной деятельности, ее условия и требования являются той причиной, которая направляет мыслительный процесс на глобальное познание объекта, на раскрытие внутренних условий существования объекта. Внутренние условия, оказывая воздействие на внешние условия (в данном случае на условия и требования задачи), позволяют глубже вникнуть в текст задачи с целью ее решения, используя, например, прием переформулировки требования задачи. Определяющим здесь является рассмотрение взаимосвязи внешних и внутренних условий и отношение последних к результату познания.

Наблюдения и анализ процесса решения математических задач показывает, что задача, детерминируя процесс мышления, определяет внешние условия непрерывного протекания мыслительного процесса. Эти условия формируются после принятия учащимся задачи ее базисом (теоретической основой решения) и способом решения (или способами решения) задачи. Внутренняя структура задачи, определяя стратегию решения, оказывает свое воздействие на внешние условия, осуществляя тем самым детерминацию мышления учащегося внешними условиями через внутренние. На основе такого взаимодействия внешнего и внутреннего хода решения задачи у школьников постепенно формируется способ решения предложенного им типа задач.

В психологии важной проблемой является соотношение понятий «проблемная ситуация» и «задача». Согласно С.Л. Рубинштейну «начало мышления – в проблемной ситуации». Развивая мысль С.Л. Рубинштейна о том, что основной формой проявления задачи является ее словесная формулировка, А.М. Матюшкин определяет задачу как «способ знакового предъявления задания одним человеком другому (или самому себе), включающий указания на цель и условия ее достижения», т.е. в понятие задачи он не включает действующее лицо – субъект. С позиций, близких приведенной, рассматривает понятие задачи и Л.М. Фридман, определяя задачу как «всякую знаковую модель проблемной ситуации».

А.Н. Леонтьев определяет задачу как «цель, данную в определенных условиях». То есть определенные условия существования задачи есть не что иное, как осознание субъектом проблемности некоторой ситуации; указание к ее разрешению (цель) приводит к возникновению задачи как таковой. Многие психологи в своих исследованиях придерживаются аналогичных трактовок, определяя понятие «задача» как предъявляемые требования достичь поставленной цели упорядоченным действием. Отсюда можно определить следующую структуру математических задач: в каждой задаче можно выделить: 1) условия, 2) требования (цель), 3) связь между ними усматривается с помощью специфической математической деятельности.

Анализируя приведенные выше трактовки понятия «задача», отвлекаясь от их различий в деталях, можно выявить одно общее положение: в понятии «задача» отражено определенное взаимоотношение человека (субъекта) с действительностью (объектом), т.е., по существу, мы говорим о некоторой системе типа «субъект – объект».

В педагогико-математическом аспекте наиболее интересными и полными, на наш взгляд, являются модели понятия «задача», построенные в работах А.А. Столяра, Ю.М. Колягина, В.И. Крупича.

Всякая задача (понимаемая пока интуитивно) возникает в какой-то предметной области. Данная предметная область может быть охарактеризована системой, состоящей из одного или нескольких множеств (которые могут быть объединены в одно универсальное множество) с установленными в них предикатами, выражающими свойства этих множеств или отношения между ними:

$$(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n). \qquad (1)$$

Любая ситуация в предметной области описывается с помощью некоторой формулы, составленной из исходных предикатов и логических операций:

$$J\ (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n). \qquad (2)$$

Под *задачей* понимается отыскание области истинности:

$$\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)/\, x_i \in A_i\ (1 \le i \le k),\ J\ (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)\}. \qquad (3)$$

С одной и той же ситуацией, описанной формулой (2), могут быть связаны различные задачи, отличающиеся заданием определенных x_1 в (3), в частности и взаимообратные задачи. Эта модель применима ко всем типам задач, обычно решаемых в школьном курсе, за исключением задач на доказательство. Под задачей на доказательство предложения J понимается требование отыскать хотя бы одну последовательность предложений $J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_n$ с определенными свойствами.

Болгарский математик-методист И. Ганчев построил модель понятия «задача» на языке теории множеств. Математическая задача представляется как «последовательное выражение мысли, с помощью которого задается некоторое подмножество R на данном множестве M математических объектов или отношений и при этом требуется: а) построить данное множество R конструктивно или описательно, или б) установить как R задано на M через другие его множества, или в) показать, что объекты и соотношения из R можно получить посредством определенных правил, характеризующих некоторые чертежные инструменты, или г) показать, что R совпадает с некоторым множеством R', которое считается известным».

Наиболее удачной, полной, точной в методическом отношении является, на наш взгляд, модель общего понятия задачи, построенная Ю.М. Колягиным

Наиболее характерным признаком общего понятия задач является наличие особого взаимодействия субъекта и объекта, ведущего к образованию некоторой системы. Под системой понимается множество элементов вместе с совокупностью отношений между этими элементами или между их свойствами.

Рассматривается сложная система, состоящая из субъекта (человека) и объекта – некоторого множества, состоящего из взаимосвязанных через некоторые свойства и отношения элементов, образующая задачную систему.

Если человеку, вступившему в контакт с системой P, известны все элементы множества и все свойства элементов и отношения между ними, достаточные для того, чтобы он мог считать множество P системой, то такую систему P называют *стационарной* по отношению к данному человеку.

Если субъекту неизвестен хотя бы один элемент, одно свойство или отношение, определенные в P, необходимые для того, чтобы он мог считать P системой, то такую систему называют *проблемной* по отношению к данному субъекту и обозначают буквой P_x.

При наличии каким бы то ни было образом выраженной потребности и возможности в установлении неизвестных данному человеку элементов, свойств и отношений из множества P, проблемный характер которого зафиксирован, последнее становится *задачей* для данного субъекта.

Таким образом, задача может существовать только по отношению к субъекту, хотя и не обязательно по отношению к конкретному (например, в форме специальных контекстов в учебном пособии).

В русле данной построенной модели понятия задачи *решить задачу* – значит преобразовать данную проблемную систему P_x в соответствующую ей стационарную систему P или установить, что такое преобразование в данных условиях (которые могут быть и субъективными) невозможно.

Задача существует независимо от того, действует ли человек в направлении ее решения или нет, необходимо лишь осознание человеком нестационарности данной системы P и наличие целевого указания (или субъективной потребности) к ее преобразованию.

В задаче можно выделить следующие основные компоненты, отражающие определенное состояние объекта P_x в системе S - P:

1. Начальное состояние (A) – характеристика проблемности системы P. Для математических задач это состояние выступает в форме условия задачи (данные элементы и связи между ними).

2. Конечное состояние (B) – характеристика стационарности системы P. Для математических задач это состояние выступает в форме заключения и цели задачи (неизвестные элементы и связи между ними).

3. Решение задачи (R) – преобразование системы P_x в систему P, т.е. один из возможных способов перехода от начального состояния к конечному. Для математических задач – способ преобразования условия задачи для нахождения требуемого заключением искомого.

4. Базис решения задачи (C) – множество факторов, определяющих некоторое решение, т.е. теоретическая или практическая основа для преобразования P_x в P посредством данного решения. Для математических задач базис решения выступает в форме обоснования решения.

Исходя из данной модели понятия «задача» и основных ее компонентов, можно составить следующую общую структуру задачи: $A - C - R - B$.

В работах В.И. Крупича математическая задача рассматривается как сложный объект – система, в которой выделяются две структуры: внешняя и внутренняя. Их взаимосвязь можно интерпретировать схемой:

ЗАДАЧА (система)

Внешнее строение задачи – информационная структура ($A – C – R_1 – D – B$)	Внутреннее устройство – внутренняя структура
Определяет степень проблемности задачи (один из основных компонентов трудности)	Определяет стратегию (ориентировочную основу способа) решения задачи и ее сложность

В соответствии с особенностями данного исследования элемент структуры задачи R разбивается на две составляющие: на способ, определяющий процесс решения (D), и основное отношение между искомыми данными (R_1), определяющее стратегию решения.

После рассмотрения последних двух моделей понятия задачи выделим их типологию в зависимости от числа компонентов, являющихся неизвестными и придающими ситуации проблемный характер. Отправляясь от стационарной ситуации $A\ C\ R\ B$, когда в задаче известны все ее компоненты, выделяют следующие типы задач: I тип – неизвестен один компонент; II тип – неизвестны два из четырех компонентов; III тип – неизвестны три компонента; IV тип – неизвестны все четыре компонента.

В этой типологии сама стационарная ситуация $A\ C\ R\ B$ может выступать в форме задачи. В частности, воспроизведение таблицы умножения или, например, воспроизведение учащимися формулировки и доказательства известной ими теоремы являются примерами такого рода задач. В соответствии с их целевым назначением задачи такого типа можно назвать тренировочными упражнениями.

Задачи I типа называют обучающими. Большинство задач школьных учебников являются обучающими задачами вида $A\ C\ \underline{X}\ B$ ($\underline{X}$ – неизвестный компонент задачи, в данном случае – решение).

Стандартными задачами в этой типологии можно считать тренировочные упражнения и обучающие задачи вида $A\ C\ R\ \underline{X}$.

Задачи II типа называют поисковыми задачами. Такие задачи чаще всего встречаются на математических олимпиадах, студенческих конкурсах по математике. Как правило, в такой задаче четко определены условие и цель, неизвестно не только решение, но и тот раздел теории – базис, на котором может быть основано это решение (задача имеет вид $A\ \underline{X}\ \underline{Y}\ B$).

Задачи III типа – проблемные. Они редко встречаются в процессе обучения и в школе, и в вузе, но зато весьма часто встречаются человеку в процессе его жизнедеятельности. С задачами такого типа человек имеет дело, например, в том случае, если перед ним четко определена некоторая цель и только цель; комплекс необходимых условий, путей и средств, достаточных для достижения этой цели, человек устанавливает самостоятельно. Такие задачи имеют вид $\underline{X}\ \underline{Y}\ \underline{Z}\ B$. В принципе нетрудно сформулировать учебные задания так, чтобы они стали задачей этого типа. Например, введя определение квадрата как особого вида ромба, можно предложить учащимся задачу: «Изучить свойства квадрата». Здесь налицо целевое указание – изучить, известно условие (компонент A) – квадрат, охарактеризованный определением. Однако ни конкретная цель задачи, ни решение, ни его обоснование неизвестны (задача вида $A\ \underline{X}\ \underline{Y}\ \underline{Z}$).

Допускается существование задач IV типа – $\underline{X}\ \underline{Y}\ \underline{Z}\ \underline{U}$. В таких задачах даны лишь целевое указание и, может быть, общее описание некоторой ситуации, ни один из четырех названых компонентов которой неизвестен. Задачи такого типа могут иметь место в творческой деятельности ученого, исследующего некоторое неопознанное явление. В процессе этой деятельности ученый-исследователь нередко начинает с формулирования (часто в виде гипотезы) той или иной проблемы, связанной с объектом исследования или условиями его существования, т.е. переходит уже к проблемной задаче, далее от проблемной – к поисковой и т.д. Таким образом, рассмотренную типологию задач можно рассматривать и как схему последовательных этапов творческой деятельности.

Главная методическая ценность этой типологии задач состоит в том, что учителю и преподавателю вуза предоставляется возможность составления задач, методически более содержательных, на базе почти любой задачи школьного или вузовского курса математики посредством варьирования основных компонентов задачи, с учетом их трансформации от неизвестных к известным в процессе ее решения.

Как известно, всегда существует несколько возможных классификаций понятия. Каждая классификация зависит от основополагающего признака, положенного в основу деления. В случае понятия математической задачи можно выделить следующие наиболее очевидные и целесообразные классификации:

1) в зависимости от вида требования – задачи на вычисление, на доказательство, на построение, на исследование и др.;

2) в зависимости от содержания условия – задачи с практическим и абстрактным содержанием;

3) исходя из полноты данных условия – правильно поставленные и неправильно поставленные; среди правильно поставленных могут быть строго определенные, нестрого определенные и недоопределенные;

4) в зависимости от характера приемов решения – стандартные и нестандартные задачи;

5) по дидактическому значению и учебной роли – задачи для введения новых понятий, аксиом, теорем; задачи для усвоения новых понятий, аксиом и теорем; задачи на применение изученных понятий, аксиом и теорем;

6) в зависимости от формы задания условия – задачи, заданные текстом, рисунком, чертежом или моделью;

7) в зависимости от способа деятельности при решении задачи – устные, письменные, задачи с предварительным измерением, комбинированные;

8) по характеру заданных объектов можно выделить задачи с числовыми данными и без числовых данных;

9) в зависимости от количества требований – одновопросные, многовопросные и задачи с явно несформулированным вопросом;

10) по характеру логических связей между условием и требованием – прямые, обратные и противоположные им задачи.