Бойков И.В. Устойчивость нейронных сетей Хопфилда. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XIV Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2014. – С. 45-53.

УДК 518.5

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ХОПФИЛДА

И.В. Бойков

STABILITY OF NEURON HOPFIELD SETS

I.V. Boykov

Аннотация. Дан обзор критериев устойчивости нейронных сетей Хопфилда.

Ключевые слова: нейронные сети Хопфилда, критерии устойчивости.

Abstract. Review of criteria of stability Hopfied neuron sets are given.

Keywords: Hopfield neuron sets, criteria of stability.

В течение нескольких последних десятилетий активно изучаются вопросы применения искусственных нейронных сетей (ИНС) к решению различных прикладных задач [1, 2]. В связи с этим представляет значительный интерес исследование динамики самих ИНС и, в первую очередь, вопросов устойчивости сетей к внешним воздействиям и к возмущениям элементов сети. Методы исследования устойчивости ИНС зависят от конкретного вида сети и от класса уравнения, которыми эта сеть описывается.

Ниже рассматриваются нейронные сети Хопфилда (НСХ), к исследованию устойчивости которых можно привлечь методы исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений [3,4,5,6].

В НСХ можно выделить несколько видов сетей: сети с непрерывными коэффициентами; сети с разрывными коэффициентами; сети с запаздыванием; сети без запаздывания.

В работе использованы следующие обозначения. Пусть X - банахово пространство; $S(a,r)=\{x,a\in X,\|x-a\|=r\}$; $B(a,r)=\{x,a\in X,\|x-a\|\le r\}$. Пусть $A-$ линейный оператор из X в X. Через $\Lambda(A)$ обозначатся логарифмическая норма [5] : $\Lambda(A)=\lim\limits_{h\downarrow 0}\frac{\|I+hA\|-1}{h}$.

В работе [6] (см. также [7]) исследована устойчивость по Ляпунову НСХ, функционирование которых описывается системами дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=-a_ix_i+\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(x_j), i=1,2,\dots,n, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0)=x_i^0, i=1,2,\dots,n. \tag{2}$$

При каждом значении T, $0<T<\infty$, представим систему (1) в виде

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=-c_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}g_{ij}^{*}(T)x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(t,x_j(t)), i=1,2,\dots,n, \tag{3}$$

где

$$g^*_{ij}(T)=\begin{cases} g_{ij}(x_j(T))/x_j(T), & x_j(T)\neq 0,\\ \lim\limits_{u\to 0} g_{ij}(u)/u, & x(T)=0;\end{cases}$$

$$f_{ij}(t,x_j(t))=g_{ij}(x_j(t))-g_{ij}(x_j(T))-g^*_{ij}(T)(x_i(t)-x_j(T)).$$

Систему (3) представим в операторной форме

$$\frac{dX(t)}{dt}=-CX(t)+G(T)X(t)+F(t,X(t)).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [6, 7]. Пусть выполнены следующие условия: 1) функции $g^*_{ij}(t), f_{ij}(t), i, j=1,2,...,n,$ непрерывны при $0\le t\le\infty$; 2) существует такое $r(r>0),$ что для каждого вектора $X(t)\in B(0,r)$ справедливо неравенство $\Lambda(-C+G(T))<0$ $(\Lambda(-C+G(T))\le-\alpha<0).$ Тогда система уравнений (1) устойчива (асимптотически устойчива).

Если функции $g^*_{ij}(t), f_{ij}(t), i,\ j=1,2,...,n,$ могут иметь разрывы первого рода, то устойчивость включений исследована в работах [6, 7].

В работе [8] рассматривались непрерывные НСХ вида

$$C_i\frac{du_i(t)}{dt}=-\frac{1}{R_i}u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(u_j(t))+I_i,\qquad t>0, i=1,2,...,n, \tag{4}$$

где n – число нейронов в сети, $u(t)=(u_1(t),...,u_n(t))^T$ – состояние вектора нейронов в сети в момент $t,$ $g(u(t))=(g_1(u_1(t)),...,g_n(u_n(t))$ – выходной вектор сети в момент $t, I=(I_1,...,I_n)$ – внешний сигнал, $c=(c_1,...,c_n)$ – диагональная матрица, $R=(R_1,...,R_n)$ – положительно определенная диагональная матрица, $T=\{T_{ij}\}, i, j=1,2,...,n$ – матрица, определяющая взаимодействие нейронов.

Теорема 2 [8]. Пусть $u^*=(u^*_1,...,u^*_n)$ неподвижная точка системы (4) и пусть выполнены следующие условия:

$$2a_i>\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|+|g'_i(u^*_i)|\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|, i=1,2,...,n.$$

Тогда u^* – локально экспоненциально устойчивая неподвижная точка.

Больщой цикл работ посвящен устойчивости НСХ с запаздываниями.

В работе [9] исследуется устойчивость НСХ с импульсными возмущениями и с задержками, зависящими от времени

$$\frac{dx(t)}{dt}=-Ax(t)+Bf(x(t-h(t)))+D\int_{t-\tau(t)}^{t}f(x(s))ds+U, t\neq t_k,$$

$$x(t_k)=c_kx(t_k^-), t=t_k,$$

где $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))^T\in R_n; A$ – диагональная матрица; $B=\{b_{ij}\}, D=\{d_{ij}\}$ – весовые матрицы, определяющие влияние задержек; $x(t_k)=c_kx(t_k^-)$ – импульсное воздействие с амплитудой c_k в момент t_k; $U=(u_1,...,u_n)^T$ – вектор внешнего воздействия.

В работе построен функционал Ляпунова–Красовского и получены критерии стохастической устойчивости. Критерии имеют достаточно сложный вид.

В статье [10] получены критерии асимптотической устойчивости в целом НСХ

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^0 g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^1 g_j(x_j(t-\tau(t))) + u_i,\ 1 \le i \le n,$$

где $x(t) = \{x_1(t), ..., x_n(t)\}$ – вектор нейронов.

Полученные в [10] критерии имеют очень сложный вид НСХ с запаздываниями в дискретной и непрерывной формах

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(u_j(t)) +$$
$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(u_j(t-h)) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \int_{-\infty}^{t} k_j(t-s) g_j(u_j(s)) ds + I_i,$$

$t \ge 0, i = 1,2,...,n, n \ge 2,$ при условиях $\int_0^{\infty} k_j(s) ds = 1,\ j = 1,2,...,n,$ исследовались в [11].

В работе [12] методом функционалов Ляпунова–Красовского исследуется устойчивость нейронной сети Кохена–Гроссберга вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \eta_i(x_i(t))(b_i(u_i(t)) -$$
$$-\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^0 g_j(x_j(t)) - \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^1 g_j(u_j(t-\tau)) + c_i),\ i = 1,2,...,n.$$

Здесь w_{ij}^0, w_{ij}^1 – весовые множители, $\eta_i(x_i)$ – функция усиления, $g_i(x_i)$ – функция активации.

В работе [13] исследована асимптотическая устойчивость в целом НСХ с запаздываниями второго порядка:

$$c_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{x(t)}{R_i(t)} + I_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(t) g_j(x_j(t-\tau)) +$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_{ijk}(t) g_j(x_1(t-\tau)) g_k(x_k(t-\tau)),\ i = 1,2,...,n,$$

с начальными функциями

$$x_i(s) = \phi_i(s),\ s \in [-\tau, 0], i = 1,2,...,n,$$

где $c_i(t) > 0, R_i(t) > 0.$

Интересные и вполне обозримые критерии устойчивости НСХ вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(x_i(t)) +$$
$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j(t-\tau_{ij}) + I_i, t \ne t_k, \quad (5)$$

$\Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-) = J_{ik}(x_i(t_k)),\ k = 1,2,..., i = 1,2,...,n,$ получены в [14].

Теорема 3 [14]. Пусть существуют положительные константы $P_i > 0, i = 1,2,...,n,$ такие, что

$$P_i(-a_{ii} - |b_{ii}|) - \sum_{j=1, j\ne i}^{n} P_j(|a_{ji}| + |b_{ji}|) \ge 0,\ i = 1,2,...,n.$$

Пусть, кроме того,

$$Y_{ik}(x_i(t_k)) = -\gamma_{ik}(x_i(t_k) - x_i^*), k = 1,2,...,\ i = 1,2,...,n,$$

где $x^* = (x^*,...,x^*_n)$ – неподвижная точка системы (5), $0 < \gamma_{ik} < 2.$ Тогда единственная неподвижная точка x^* системы (5) асимптотически устойчива в целом.

НСХ, описываемые системами дифференциальных уравнений видов

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = -a_k(t)x_k(t) + \sum_{l=1}^{n} w_{kl}(t)\phi_l(x_l(t-\tau)) - I_k, \quad k = 1,2,...,n, \tag{6}$$

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = -a_k(t)x_k(t) + \phi\left(\sum_{l=1}^{n} w_{kl}(t)x_l(t-\tau)\right) - I_k, \quad k = 1,2,...,n, \tag{7}$$

исследовались в работах [15–17].

Для определенности остановимся на системе (6). Вначале рассмотрим случай, когда коэффициенты $a_k(t), w_{kl}(t)$ непрерывны.

Введем обозначения:

$$\alpha(T) = \{-a_1(T),\ldots,-a_n(T)\}, \quad \beta(T) = \{\beta_1(T),\cdots,\beta_n(T)),$$

где $\beta_k(T) = \sum_{l=1}^{n} w_{kl}(T) \frac{\phi_l^{(1)}(x_l^*(T-\tau))}{1!} \frac{z_l(T-\tau)}{z_l(T)}, \quad k = 1,2\ldots,n,$

$$\gamma_k(T) = \sum_{l=1}^{n} w_{kl}(T) \frac{\phi_l^{(2)}(x_l^*(T-\tau))}{2!} \frac{z_l^2(T-\tau)}{z_1^2(T)}, \quad k = 1,2\ldots,n.$$

Введем матрицы $A(T),$ $B(T),$ $\Gamma(t).$ Матрица $A(T)$ является диагональной, элементы которой равны $a_{jj}(T) = -a_j(T), \quad j = 1,2,\ldots,n.$

Матрица $B(T)$ составлена из элементов $b_{ij}(T),$ определяемых равенствами $b_{i1}(T) = \beta_i(T), \; i = 1,2,\ldots,n, \; b_{ij}(T) = 0, \; i = 1,2,\ldots,n, \; j = 2,3,\ldots,n.$

Матрица $\Gamma(T)$ составлена из элементов $\gamma_{ij}(T),$ определенных равенствами $\gamma_{i1}(T) = \gamma_i(T), \; i = 1,2,\ldots,n, \; \gamma_{ij}(T) = 0, \; i = 1,2,\ldots,n, \; j = 2,3,\ldots,n.$

Пусть $x^*(t) = \{x_1^*(t),...,x_n^*(t)\}$ – решение системы (6) при нулевых начальных значениях. Исследуем устойчивость решения $x^*(t)$ при возмущении начальных условий.

Сделаем замену переменных $x_k(t) = z_k(t) + x_k^*(t), k = 1,2,...,n.$

Тогда система (6) при $t \ge T(T \ge 0)$ может быть записана в операторной форме как

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(T)z(t) + B(T)z(t) + \Gamma(T)z^2(t) + \Psi(t).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4 [16]. Пусть выполнены условия:

1) $\Lambda(A(t) + B(t)) \le -v, v > 0, 0 \le t < \infty,$

2) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=2}^{\infty} | w_{kl}(t) | \frac{|\phi_l^{(j)}(t-\tau)|}{j!} \le k = const, 0 < t < \infty$

Тогда неподвижная точка x^* сети (6) равномерно асимптотически устойчива.

Рассмотрим теперь случай, когда функции активации НСХ (6) имеют разрывы. Пусть функции $\varphi_i(u)$ имеют вид

$$\varphi_i(u) = \begin{cases} \varphi_i^*(u), & u > u_*, \\ \varphi_i^{**}(u), u < u_*, & i = 1,2,...,n; \end{cases}$$

В качестве аппарата исследования в данном случае используются дифференциальные включения.

Для определенности ниже полагается $u \neq 0$.

При сделанных предположениях систему уравнений (6) удобно представить в виде двух систем уравнений:

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t)z_k(t) + \sum_{l=1}^{n} w_{kl}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_l^{*(j)}(z_l(t-\tau))}{j!} z_l^j(t-\tau), \quad k = 1,2,\dots,n \text{ при } z_l(t-\tau) > u^*,$$

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t)z_k(t) + \sum_{l=1}^{n} w_{kl}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_l^{**(j)}(z_l(t-\tau))}{j!} z_l^j(t-\tau), \quad k = 1,2,\dots,n \text{ при } z_l(t-\tau) < u^*.$$

Введем матрицы $A(T)$, $B_1(T)$, $B_2(T)$, $\Gamma_1(T)$, $\Gamma_2(T)$, где $A(T) = \{\alpha_{ij}(\tau)\}$, $\alpha_{ii}(T) = -a_i(T)$, $i = 1,2,\dots,n$, $\alpha_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,\dots,n$; $B_1(T) = \{\beta_{ij}^*(T)\}$, $\beta_{i1}^*(T) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_l^{*(1)}(z_l(T-\tau))}{1!}$, $i = 1,2,\dots,n$, $\beta_{ij}^*(T) = 0$, $j \neq 1$, $i, j = 1,2,\dots,n$; $B_2(T) = \{\beta_{ij}^{**}(T)\}$, $\beta_{i1}^{**}(T) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_l^{**(1)}(z_l(T-\tau))}{1!}$, $i = 1,2,\dots,n$, $\beta_{ij}^{**}(T) = 0$, $j \neq 1$, $i, j = 1,2,\dots,n$; $\Gamma_1(T) = \{\gamma_{ij}^*(T)\}$, $\gamma_{i1}^*(T) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_l^{*(2)}(z_l(T-\tau))}{2!}$, $i = 1,2,\dots,n$, $\gamma_{ij}^*(T) = 0$, $j \neq 1$, $i, j = 1,2,\dots,n$. $\Gamma_2(T) = \{\gamma_{ij}^{**}(T)\}$, $\gamma_{i1}^{**}(T) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_l^{**(2)}(z_l(T-\tau))}{2!}$, $i = 1,2,\dots,n$, $\gamma_{ij}^{**}(T) = 0$, $j \neq 1$, $i, j = 1,2,\dots,n$.

Теорема 5 [16]. Пусть выполнены условия:

а) $\Lambda(A(t) + B_i(t)) \leq -\nu, \quad \nu > 0, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad i = 1,2,$

б) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=2}^{\infty} |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{*(j)}(t-\tau)|}{j!} \leq L, \quad 0 \leq t \leq \infty,$

в) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=2}^{\infty} |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{**(j)}(t-\tau)|}{j!} \leq L, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad L = const, \quad 0 < L < \infty.$

Тогда неподвижная точка нейронной сети (6) с точками разрыва функций активации равномерно асимптотически устойчива.

Замечание. Случай, когда функции активации $\varphi_i^*(u)$, $\varphi_i^{**}(u)$, $i = 1,2,...,n$, не разлагаются в степенные ряды, остается открытым.

Библиографический список

1. Галушкин А.И. Теория нейронных сетей. – М.: ИПРЖР, 2000. – 416 с.
2. Горбань А.И., Россиев Д.А. Нейронные сети на персональном компьютере. – Новосибирск: Наука, 1996. – 276 с.
3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
5. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференци-альных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
6. Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных урав-нений. – Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2008. – 244 с.
7. Бойков И.В. К устойчивости нейронных сетей Хопфилда // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 9. – С. 124–140.
8. Jang X., Liao X., Li C., Evans D.J. New estimate on the domains of attraction of equilibrium points in continuous Hopfield neural network// Physics Letter A. 351 (2006) P. 161–166.

9. Raja R., Sakthivel R., Anthoni S.M., Kim H. Stability of Impulsive Hopfield Neural Networks with Markovian Switching and Time–Varying Delays // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2011, V. 21, №1. – P.127–135.

10. Zong G.-D., Liu Jia. New Delay–Dependent Global Asymptotic Stability Condition for Hopfield Neural Networks with Time–Varying Delays// International Journal of Automation and Computing. 2009, 6(4). – P. 415–419.

11. Yin L., Chen Y., Zhao Y. Global Exponential Stability for a Class of Neural Networks with Continuonsly Distributed Delays //Advances in Dynamical Systems and Applications. 2009. V. 4, № 2. – P. 221–229.

12. Souza F.O., Palhares R.M., Ekel P.Y. Novel stability criteria for uncertain delayed Cohen–Grossberg neural networks using discretized Lyapunov functional // Chaous, Solitons and Fractals. 2008. doi: 10.10.1016/j chaos. 2008. 09.009.

13. Wang P., Lian H., Wu Y. Global Asymptotic Stability of High-Order Delay Hopfield Neural Networks with Time–Varying Coefficients // Journal for Analysis and Its Applications. 2005. V. 24. № 2. – P. 419–429.

14. Wu A., Zhang J., Fu C. Global Asymptotical Stability of Delayed Impulsive Neural Networks without Lipschite Neuron Activations // Europian Jornal of Pure and Applied Mathematics. 2010. V. 3, № 5. – P. 806–818.

15. Бойков И.В. Критерии устойчивости нейронных сетей Хопфилда и их применение для программной и аппаратной стабилизации информационных сетей // Межвузовский сб. науч. трудов «Вычислительные системы и технологии обработки информации» / под ред. В.И. Волчихина. – Вып. 10 (33). – Пенза: Изд-во ПГУ, 2011. – С.113–125.

16. Бойков И.В. Устойчивость нейронных сетей Хопфилда с запаздыванием // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. – 2012. – №2 (22). – С. 85– 98.

17. Бойков И.В., Мойко Н.В. Устойчивость и стабилизация нейрон-ных цепей Хопфилда с запаздыванием // Труды междунар. симпозиума «Надежность и качество». – Пенза, 2012. – С. 260–263.

Бойков Илья Владимирович
Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Ilya Vladimirovich
Penza State University, Penza, Russia