

Бутаев М.М., Сафронов А.Д. Оценка параметров инфотелекоммуникационной системы с входным потоком от источников с равномерным законом распределения временных интервалов между требованиями. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XIV Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2014. – С. 54-58.

УДК 004

**ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ
ИНФОТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ
С ВХОДНЫМ ПОТОКОМ ОТ ИСТОЧНИКОВ
С РАВНОМЕРНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ ТРЕБОВАНИЯМИ**

М.М. Бутаев, А.Д. Сафронов

**PERFORMANCE INFOCOMMUNICATION SYSTEMS
WITH THE UNIFORM ALLOCATION
OF TIME INTERVALS BETWEEN EVENTS**

M. M. Butayev, A.D. Safronov

Аннотация. Приведены аналитические функции характеристик системы массового обслуживания $B_n/M/1$ с входным потоком, полученным мультиплексированием потоков с равномерным распределением интервалов времени между требованиями. Рассчитаны погрешности аппроксимации характеристик системы массового обслуживания.

Ключевые слова: характеристики производительности инфотелекоммуникационной системы, система массового обслуживания, мультиплексированный поток, погрешность аппроксимации.

Abstract. Performance infocommunication systems with the uniform allocation of time intervals between events of multiplexing flows $B_n/M/1$ are resulted. Approximation errors of performance queuing system are calculated.

Keywords: performance, queuing system, multiplexer flow, approximation error.

Оценка временных параметров системы массового обслуживания (СМО), к которой обычно сводится модель инфотелекоммуникационной системы при исследовании производительности, производится либо расчётным методом, либо имитационным моделированием. Аналитические зависимости, удобные для применения в практике расчётов параметров системы, получить сложно. В частности, отсутствуют формулы расчёта параметров СМО при равномерном законе распределения вероятностей длительностей интервалов между требованиями на входе системы.

В научно-технической практике часто проще обосновать гипотезу о равномерном законе распределения вероятностей длительностей интервалов между требованиями.

Получена формула для аналитической оценки параметров СМО с мультиплексированным входным потоком требований как частный случай решения для СМО типа $G/M/1$ [1]. Для такой системы параметры определяются через решение функционального уравнения

$$\sigma = A^*(\mu - \mu\sigma), 0 < \sigma < 1,$$

где $A^*(p)$ – преобразование Лапласа плотности вероятности распределения интервалов времени между требованиями; μ – интенсивность обслуживания требований обслуживающим прибором.

У функционального уравнения есть решение при $\sigma = 1$, но оно не удовлетворяет условию стационарности процессов в СМО.

В [2] определено преобразование Лапласа плотности вероятности с обобщённым бета-распределением [3]:

$$A^*(p) = \frac{(2n-1)!}{(pb)^{2n-1}} \left[-e^{-pb} + \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{(-pb)^k}{k!} \right], \quad (1)$$

где b – наибольшее значение интервала времени между требованиями при равномерном законе их распределения $[0, b]$.

Через специальную неполную гамма-функцию $\Gamma(k, x)$ (1) принимает вид:

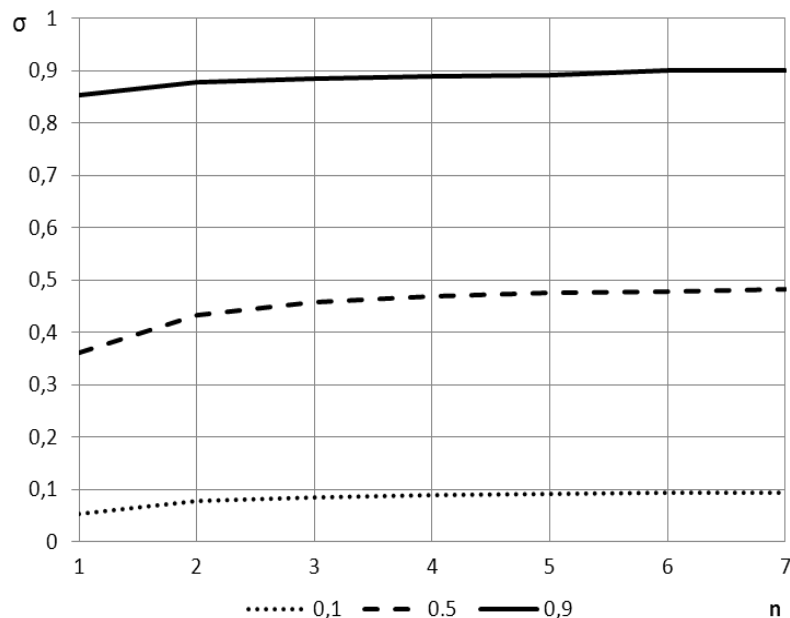
$$A^*(p) = -(2n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-bp)^k}{(2n-1-k)!} = \frac{e^{-bp}}{(bp)^{2n-1}} [(2n-1)\Gamma(2n-1, bp) - (2n-1)!].$$

Отсюда функциональное уравнение:

$$\frac{e^{-b\mu(1-\sigma)}}{(b\mu(1-\sigma))^{2n-1}} [(2n-1)\Gamma(2n-1, b\mu(1-\sigma)) - (2n-1)!] - \sigma = 0. \quad (2)$$

Уравнение трансцендентное, аналитическое решение его неизвестно.

Графики зависимости значений решений функционального уравнения (2) $\sigma(n, \lambda, b, \mu)$ от n и коэффициента использования $\rho = \lambda/\mu$, $\lambda = 2n/b$ приведены на рисунке.



Зависимости $\sigma(n)$ для $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$

Значения решений функционального уравнения хорошо аппроксимируются, например, полиномом

$$\sigma^*(\rho) = 0,0057\rho^2 + 0,9433\rho + 0,0037. \quad (3)$$

Достоверность аппроксимации $R^2=0.9991$ для $\rho \in [0,1; 0,9]$.

Характеристики СМО $B_n/M/1$ как частного случая $G/M/1$ согласно [1] определяются:

- средняя длина очереди $L = q = \frac{\rho\sigma}{1-\sigma}$;

- среднее время пребывания требования в очереди $W = \frac{\sigma}{\mu(1-\sigma)}$;

- среднее время пребывания требования в СМО $T = W + 1/\mu$.

Вычислять значения этих характеристик можно либо численно, решая функциональные уравнения (2) либо вычисляя σ^* с помощью аппроксимирующего полинома (3). Например, для $n=3$, $b = 6$, $\mu = 2$ и $\rho = 0,5$ из численного решения (2) $\sigma = 0,456614$, а $\sigma^* = 0,454233$, следовательно, $q = 0,420$ и $0,416$ соответственно.

Исследование погрешностей вычисления характеристик СМО приближёнными методами проводилось с использованием имитационной модели системы, состоящей из одного сервера с экспоненциальным законом распределения времени обслуживания и пяти источников требований с одинаковыми равномерными законами распределения вероятностей длительностей интервалов от 0 до 2 с при этом $\lambda = n/\mu$ (если $n = 5$, то $\lambda = 5/\mu$) 1/с. Имитационное моделирование проводилось в среде AnyLogic 7.0.1. Измерялось среднее время пребывания требования в СМО и среднее количество требований в очереди к серверу (T_1, L_1 – имитационное моделирование, T_2, L_2 – численное решение (2), T_3, L_3 – аппроксимирующий полином (3)). Численные значения для $n = 5$ приведены в таблице. Продолжительность имитационного модельного времени – 15000 с, т.е. в среднем через систему проходит 75000 требований.

Результаты измерений на имитационной модели, расчётов по (2) и (3) характеристик СМО при $n = 5$

μ	ρ	Имитация		Численно		Полином	
		L_1	T_1	L_2	T_2	L_3	T_3
50	0,1	0,01	0,02 2	0,01 0	0,02 2	0,01 1	0,02 2
20	0,25	0,07	0,06 4	0,07 5	0,06 5	0,07 9	0,06 6
10	0,5	0,39 5	0,17 9	0,45 1	0,19 0	0,45 6	0,19 1
9	0,55 6	0,54 1	0,22	0,62 7	0,23 7	0,62 5	0,23 6
8	0,62 5	0,77 2	0,27 9	0,94 2	0,31 3	0,92 0	0,30 9
7	0,71 4	1,25 6	0,39 3	1,61 6	0,46 6	1,52 1	0,44 7
6,5	0,76 9	1,77 2	0,50 9	2,32 2	0,61 8	2,10 8	0,57 6
6	0,83 3	2,89 6	0,74 7	3,77 8	0,92 2	3,20 7	0,80 8
5,5	0,90 9	5,97 2	1,37 8	8,24 6	1,83 1	5,87 3	1,35 6
5,2 5	0,95 2	16,4 1	3,47 2	15,7 74	3,34 5	9,31 6	2,05 4

Вычисления параметров производительности с помощью численного решения функционального уравнения, либо с помощью аппроксимирующего полинома существенно упрощает оценку характеристик инфокоммуникационной системы. При $n > 20$ решение функционального уравнения для $\rho > 0,9$ в исходном виде становится неустойчивым из-за влияния вычислительных погрешностей, точность расчёта резко падает. Этот эффект при использовании аппроксимирующего полинома отсутствует.

Библиографический список

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – М.: Наука, 1979.

3. Бутаев М.М., Сафронов А.Д. Характеристики распределения интервалов времени между событиями мультиплексированного потока // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2014. – №4, Т. 12. – С. 4–11.

Бутаев Михаил Матвеевич

ОАО «Научно-производственное предприятие «Рубин»,
г. Пенза, Россия
E-mail: nts@npp-rubin.ru

Butaev Mihail Matveevich

ОАО «Nauchno-proizvodstvennoe predpriyatie «Rubin», Penza, Russia

Сафронов Алексей Дмитриевич

ОАО «Научно-производственное предприятие «Рубин»,
г. Пенза, Россия
E-mail: nts@npp-rubin.ru

Safronov Aleksey Dmitrievich

ОАО «Nauchno-proizvodstvennoe predpriyatie «Rubin», Penza, Russia