Лазовская Т.В., Тархов Д.А. Нейросетевые подходы к решению дифференциально-алгебраических уравнений. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XV Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2015. – С. 67-69.

УДК 004.021

# НЕЙРОСЕТЕВЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

Т.В. Лазовская, Д.А. Тархов

# NEURAL NETWORK APPROACHES TO SOLVING DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

T.V. Lazovskaia, D.A. Tarkhov

**Аннотация.** Рассматривается три нейросетевых подхода к решению краевых задач для дифференциально-алгебраических уравнений. Проверка предлагаемых методов и оценка результатов их применения проводится на тестовой задаче, имеющей несколько решений.

**Ключевые слова:** дифференциально-алгебраические уравнения, параметризация, краевая задача, нейронные сети, функционал ошибки.

**Abstract.** Neural network approach to boundary value problems for differential-algebraic equations solving is considered Method testing and evaluation of results are carried out on test problem having multiple solutions.

**Keywords:** neural network, differential-algebraic equations, parameterization, boundary problem, error functional.

Рассмотрим дифференциально-алгебраическую задачу [1]

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y, z), \quad \mathrm{i} = 1,\dots,\mathrm{k}; \tag{1}$$

$$\mathrm{G}_j(t, y, z) = 0, \quad j = 1,\dots,m, \tag{2}$$

с граничным условием

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}(0), \mathbf{z}(0), \mathbf{y}(\mathrm{T}), \mathbf{z}(\mathrm{T})) = 0. \tag{3}$$

Решение $\mathbf{y}(t)$ ищется на отрезке $t \in [0, T]$. Будем считать, что функции $f$, $G$, $b$ удовлетворяют таким условиям, что решение задачи (1) – (3) существует. В частности, выполнены условия согласования на концах отрезка $[0, T]$

$$\begin{cases} \mathbf{G}(0, \mathbf{y}(0), \mathbf{z}(0)) = 0, \\ \mathbf{G}(T, \mathbf{y}(T), \mathbf{z}(\mathrm{T})) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Простейший нейросетевой подход [2] к решению данной задачи состоит в поиске решения $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ в виде выходов нейронных сетей

$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \sum_{l=1}^{N} \mathbf{c}_l v(\mathrm{t}, \mathbf{a}_l), \ \mathbf{z}(\mathrm{t}) = \sum_{l=1}^{N_1} \mathbf{d}_l v(\mathrm{t}, \mathbf{a}'_l),$$

где $v$ – базисные функции (гауссианы, сигмоиды и пр.). Векторные параметры $\mathbf{a}_l$, $\mathbf{a}'_l$, $\mathbf{c}_l$ и $\mathbf{b}_l$ находятся минимизацией соответствующего функционала ошибки

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{dy_i(t_j)}{dt} - f_i(t_j, \mathbf{y}(t_j), \mathbf{z}(t_j))\right)^2 + \delta_1 \sum_{j=1}^{M_1}\left(\sum_{i=1}^{m} G_i^2(t_j, \mathbf{y}(t_j), \mathbf{z}(t_j))\right) + \\ + \delta_2 \left\|\mathbf{b}(y(0), z(0), y(T), z(T))\right\|^2. \tag{5}$$

где $t_j \in [0, T]$– тестовые точки; $\delta_1, \delta_2 > 0$ – штрафные параметры.

---

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №14-01-00660 и №14-01-00733).

В качестве модельной рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенной дифференциально-алгебраической системы

$$\begin{aligned} &y_1' = y_2, \\ &\varepsilon y_2' = y_1 - z^2, \\ &z - y_1^2 = 0, \\ &y_1(0) + y_2(0) = 0, \\ &y_1(1) = 1/2. \end{aligned} \qquad (6)$$

В зависимости от параметра ε задача имеет различное число решений [1]. Применение простейшего нейросетевого подхода при $\varepsilon = 0.1$ привело к нахождению лишь одного решения, по-видимому, наиболее устойчивого.

Второй подход учитывает особенности конкретной поставки и рассматривает задачу (6) как параметрическую. Таким образом, решение ищется на некотором интервале изменения параметра [3] в виде

$$\mathbf{y}(\mathrm{t},\varepsilon) = \sum_{l=1}^{N} \mathbf{c}_l v(\mathrm{t},\varepsilon,\mathbf{a}_l),\ \mathbf{z}(\mathrm{t},\varepsilon) = \sum_{l=1}^{N_1} \mathbf{d}_l v(\mathrm{t},\varepsilon,\mathbf{a}_l').$$

Веса сетей подбираются минимизацией соответствующего функционала ошибки, являющегося следующей модификацией (5)

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{dy_i(t_j,\varepsilon_j)}{dt} - f_i(t_j,\mathbf{y}(t_j,\varepsilon_j),\mathbf{z}(t_j,\varepsilon_j),\varepsilon_j)\right)^2 + \delta_1\sum_{j=1}^{M_1}\left(\sum_{i=1}^{m} G_i^2(t_j,\mathbf{y}(t_j,\varepsilon_j),\mathbf{z}(t_j,\varepsilon_j),\varepsilon_j)\right) +$$
$$+\delta_2\left\|\mathbf{b}(y(0,\varepsilon_j),z(0,\varepsilon_j),y(T,\varepsilon_j),z(T,\varepsilon_j),\varepsilon_j)\right\|^2.$$

Тестовые точки рассматриваются парами $(t_j,\varepsilon_j)$. Нейросетевое приближение для интервала изменения параметра $[0.01, 0.1]$ дало, как и в предыдущем случае, наименьшее из решений.

Третий подход состоит во введении дополнительного параметра $p = y_1(0)$ вместо ε и подборе его значений, для которых функционал ошибки минимален. При $\varepsilon = 0.1$такой подход позволил получить оба решения из [1].

Библиографический список

1. Будкина Е.М., Кузнецов Е.Б. Решение краевых задач для дифференциально-алгебраических уравнений // Материалы XIX Междунар. конф. ВМСППС’2015. – М.: Изд-во МАИ, 2015.

2. Васильев А.Н., Тархов Д.А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2009. – 528 с

3. Лазовская Т.В., Тархов Д.А. Об использовании методов нейронных сетей для одного жесткого уравнения первого порядка // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. статей XIV Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2014. – С. 171–175.

**Лазовская Татьяна Валерьевна**
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: tatianala@list.ru

**Lazovskaia T.V.**
Peter the Great Saint-Petersburg Politechnical University,
Saint-Petersburg, Russia

**Тархов Дмитрий Альбертович**
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dtarkhov@gmail.com

**Tarkhov D.A.**
Peter the Great Saint-Petersburg Politechnical University,
Saint-Petersburg, Russia