Косников Ю.Н. Геометрическое моделирование неаналитических поверхностей в графических системах: от функций радиального базиса к функциям ортогонального базиса. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XV Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2015. – С. 117-123.

УДК 004.925.83

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ: ОТ ФУНКЦИЙ РАДИАЛЬНОГО БАЗИСА К ФУНКЦИЯМ ОРТОГОНАЛЬНОГО БАЗИСА

Ю.Н. Косников

GEOMETRICAL MODELLING NOT ANALYTICAL SURFACES IN GRAPHIC SYSTEMS: FROM FUNCTIONS OF RADIAL BASIS TO FUNCTIONS OF ORTHOGONAL BASIS

Y.N. Kosnikov

Аннотация. Предлагается двухэтапный процесс моделирования геометрических объектов. Моделирование выполняется посредством перехода от интерполяционной модели на основе радиальных базисных функций к конечно-разностному представлению объекта на основе смешивающих функций ортогонального базиса.

Ключевые слова: интерполяция, смешивающая функция, радиальный базис, ортогональный базис, метод конечных разностей, полигональная модель.

Abstract. Two-stage process of modelling of geometrical objects is offered in the paper. The modelling is executed by means of transition from interpolation model with application of radial basis functions to finite differential representation of object with application of the blending functions of orthogonal basis.

Keywords: interpolation, the blending function, radial basis, orthogonal basis, a method of finite differences, polygonal model.

Математическое моделирование геометрических объектов с целью их дальнейшей визуализации имеет множество приложений. Это визуализация результатов эксперимента или мониторинга, спроектированных в САПР изделий, рельефа местности в транспортных симуляторах, мнемосхем в АСУТП и другое. Объекты визуализации во всех этих случаях могут иметь самую разнообразную форму, в том числе не имеющую аналитического описания и заданную набором характерных точек, а отображение таких объектов зачастую должно идти в режиме реального времени.

Реконструкция поверхности по характерным точкам осуществляется, как правило, интерполяционными методами. Из математики известен целый ряд таких методов, но, если конечной целью создания интерполяционной модели является ее визуализация в режиме реального времени, выбор метода интерполяции нужно проводить, исходя из особых требований. Нужно учесть, что конечным результатом моделирования объекта должно стать его полигональное представление (полигональная сеть). В его состав входят координаты вершин полигонов и векторов нормалей. Векторы нормалей нужны для моделирования освещенности (затенения) пространственных объектов. Полигональная сеть передается в графический процессор компьютера, который аппаратно поддерживает ее обработку.

С учетом изложенного своеобразия визуализации пространственных объектов можно сформулировать основные требования к результатам интерполяции их поверхностей:

- точное прохождение поверхности через характерные точки;
- гладкость поверхности и отсутствие у нее осцилляций;
- наличие корректных нормалей к поверхности, проведенных через ее характерные точки;
- возможность применить быстрые алгоритмы для вычисления промежуточных точек поверхности и векторов нормалей в этих точках;
- возможность алгоритмически просто получить полигональную модель объекта.

Анализ перечисленных требований позволяет выбрать рациональные способы их выполнения.

В качестве метода интерполяции следует выбрать интерполяцию на основе смешивающих функций. Ее суть в том, что координаты промежуточной (текущей) точки получаются в результате суммирования (смешивания) взятых с определенными весовыми коэффициентами координат узлов интерполяции:

$$\mathrm{k} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \lambda_{\mathrm{i}} \mathrm{k}_{\mathrm{i}}, \quad (1)$$

где k – координата текущей точки; k_i – координата i-го узла интерполяции; λ_i – вес i-го узла интерполяции; N – количество узлов интерполяции.

Описание (1) может быть получено в различных координатных системах: для протяженных объектов – в декартовой ($k = x, y, z$), для локализованных – в декартовой или сферической (k = ρ, φ, θ). В зависимости от характера поверхности описание имеет явную или параметрическую форму. В качестве узлов интерполяции выступают характерные (опорные) точки поверхности объекта. Весовой коэффициент λ_i представляет собой значение смешивающей функции для i-й опорной точки и зависит от удаления этой точки от текущей точки. Вид смешивающей функции определяет характер поверхности, полученной в результате интерполяции. Правильный выбор смешивающих функций обеспечивает точное прохождение поверхности через опорные точки и гладкость поверхности.

Координаты нормального вектора к поверхности объекта определяются как частные производные функции-интерполянта по аргументам системы координат, в которой размещаются опорные точки. Чем проще вид смешивающих функций, тем проще описание координат вектора нормали и, следовательно, тем быстрее они вычисляются.

Из геометрического моделирования известны методы быстрого нахождения промежуточных точек поверхности. Это, прежде всего, метод подразбиений и метод конечных разностей [1]. Первый заключается в последовательном разбиении поверхности на все более мелкие сегменты до тех пор, пока точность представления поверхности не позволит заменить их полигонами. Подразбиение применяется к сплайновым моделям и работает с вершинами характеристического многогранника сплайна. Метод конечных разностей эффективно применяется для вычисления степенных многочленов и для обеспечения приемлемой точности вычислений требует равномерной ортогональной расстановки опорных точек в выбранной координатной системе. Это же условие – равномерная расстановка опорных точек в узлах ортогональной координатной сетки – значительно упрощает алгоритм объединения промежуточных точек поверхности в полигоны.

Основываясь на приведенных рассуждениях, можно предложить двухэтапную организацию геометрического моделирования неаналитических поверхностей в графической системе.

На первом (предварительном) этапе осуществляется переход от исходного описания поверхности к новому описанию, основанному на принадлежащих поверхности равномерно расставленных новых опорных точках. Одновременно в новом описании от функций радиального базиса предлагается перейти к смешивающим функциям ортогонального базиса (СФОБ). В этом случае расстояние r_i между текущей точкой и i-ой опорной точкой вычисляется раздельно вдоль каждой координаты пространства. Для дальнейшего упрощения вычислений можно уменьшить размерность пространства для нахождения r_i до двух, то есть вычислять не расстояние между самими точками в трехмерном пространстве, а расстояние между проекциями этих точек на поверхность аргументов. Последний прием может быть применен только в случае описания поверхности однозначными функциями. Это также возможно, так как форма поверхности уже определена на этапе нахождения новых опорных точек, и может быть введена вспомогательная система координат объекта, в которой его описание будет однозначной функцией. Эта система координат может быть как декартовой, так и сферической. Методика перехода от исходной к вспомогательной системе координат изложена в [2].

Второй этап геометрического моделирования – переход к полигональной модели объекта – выполняется в режиме реального времени. На этом этапе используется конечно-разностное представление поверхности на основе СФОБ. Организуется ортогональный обход поверхности аргументов вспомогательной системы координат с некоторым шагом, зависящим от желаемой точности полигональной модели. На каждом шаге находятся координаты промежуточных точек, которые принимаются за вершины полигонов. Одновременно с помощью конечноразностных формул вычисляются координаты векторов нормалей к поверхности. Полигональная модель объекта вместе с параметрами расположения объекта в отображаемой сцене передается в графический процессор.

Для перехода к новым опорным точкам нужно сначала на основе исходных опорных точек получить аналитическое описание поверхности. Хорошими интерполяционными возможностями обладают радиальные базисные функции (РБФ), которые имеет смысл применить в качестве смешивающих функций. Тогда математическую модель поверхности можно получить, используя имеющиеся в литературе методики РБФ-интерполяции и рекомендации по выбору видов РБФ. Проще всего это сделать, получив описание поверхности в явной форме. Для этого, как уже отмечалось, исходные опорные точки размещаются во вспомогательной системе координат. Далее организуется последовательный обход поверхности аргументов вспомогательной системы координат с некоторым шагом R_u, R_vпо каждой координате (обычно R_u=R_v) и вычисление промежуточных точек по полученному аналитическому выражению. Эти точки становятся новыми опорными точками, и им в соответствие ставятся новые смешивающие функции – СФОБ.

В итоге описание поверхности объекта выглядит следующим образом:

$$\mathrm{k} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \lambda_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{bf}_{\mathrm{ui}} \cdot \mathrm{bf}_{\mathrm{vi}}, \tag{2}$$

где u, v – текущие координаты поверхности аргументов (x, y – для декартовой, φ, θ – для сферической систем координат); k – вычисляемая координата текущей точки (z – для декартовой, ρ – для сферической систем координат); bf_{ui}, bf_{vi} – значения смешивающих функций для i-й опорной точки, действующих в направлениях координат u и v.

Коэффициенты влияния λ_i (веса) опорных точек находятся из условия прохождения поверхности через опорные точки так же, как они находятся в случае применения РБФ.

В качестве смешивающих функций bf_{ui}, bf_{vi} можно рекомендовать степенные полиномы низкой степени. Например, линейные смешивающие функции имеют вид

$$\mathrm{bf}_{\mathrm{u}} = \begin{cases} \left(1\text{-}\frac{\mathrm{r_u}}{\mathrm{L_u}}\right) & \text{при } \mathrm{r_u} < \mathrm{L_u}, \\ 0 & \text{при } \mathrm{r_u} \geq \mathrm{L_u}, \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathrm{bf}_{\mathrm{v}} = \begin{cases} \left(1\text{-}\frac{\mathrm{r_v}}{\mathrm{L_v}}\right) & \text{при } \mathrm{r_v} < \mathrm{L_v}, \\ 0 & \text{при } \mathrm{r_v} \geq \mathrm{L_v}, \end{cases} \tag{4}$$

где r_u, r_v – расстояния от проекции опорной точки до проекции текущей точки, измеренные вдоль координатных осей u, v; L_u, L_v – величины зон влияния опорной точки вдоль координатных осей u, v.

На этапе реального времени происходит последовательный обход поверхности аргументов вспомогательной системы координат с шагом, необходимым для желаемой точности полигональной сети. На каждом шаге находятся координаты очередной промежуточной точки, которая принимается за вершину полигональной сети. На этом этапе описание поверхности представляется в конечно-разностной форме. Например, смешивающая функция bf_u получает следующий вид:

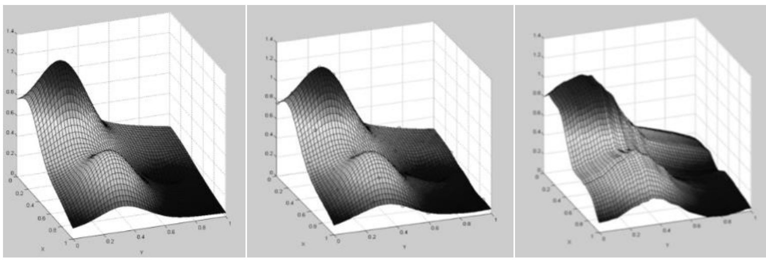
$$bf_{u(j+1)} = bf_{uj} + \Delta bf_u = bf_{uj} + \frac{\delta_u}{L_u}, bf_{u0} = 1 - \frac{r_{u0}}{L_u},$$

где δ_u – приращение расстояния r_u на каждом шаге (постоянная величина); j – номер шага; r_{u0} – начальное значение расстояния r_u, зависящее от направления обхода и расположения начала координат u, v.

Поскольку величина $(\delta_{\mathrm{u}}/\mathrm{L_u})$является постоянной и находится один раз, вычисление значения смешивающей функции некоторой опорной точки на очередном шаге выполняется за одну операцию суммирования. Аналогичным образом вычисляются значения смешивающей функции bf_{vi}. Расстояния между опорными точками кратны постоянным величинам R_u, R_v, что упрощает вычисление смешивающих функций всех опорных точек.

Применение СФОБ позволяет ускорить и другую ресурсоемкую операцию отображения – вычисление нормалей к поверхности. При традиционном описании полигональных поверхностей проектировщик задает направления нормалей к каждому полигону, причем привязывает эти нормали к его вершинам. Тогда к каждой вершине привязывается несколько нормалей – по одной для каждого из полигонов, сходящихся в этой вершине. Далее средствами графического программного обеспечения выполняется усреднение нормалей, привязанных к каждой вершине полигональной сети. Описание поверхности с помощью СФОБ позволяет в реальном времени вычислять координаты корректных нормалей к поверхности без усреднения. Как известно, координаты нормального вектора к криволинейной поверхности находятся из частных производных математического описания поверхности, взятых по координатам-аргументам системы координат. Из выражений (2), (3), (4) легко видеть, что эти частные производные будут иметь весьма простой вид и могут вычисляться по разностным формулам.

Применение СФОБ проверено на моделировании тестовой поверхности Франке [3]. На рисунке *а* показан вид поверхности, на рисунке *б* приведен результат ее РБФ-интерполяции, а на рисунке *в* – результат интерполяции на основе линейной СФОБ (изображения получены студенткой Д. Лапшиной).



а б в

Вид тестовой поверхности Франке, полученной по точному математическому выражению (а) и с помощью интерполяции на основе РБФ (б) и СФОБ (в)

Визуальный анализ показывает возможность получения на основе СФОБ поверхности с достаточной для практического применения гладкостью, при этом нужно учесть, что конечной формой модели поверхности является полигональное представление. Простота вычисления смешивающих функций ортогонального базиса с применением конечно-разностных формул позволяет выполнять визуализацию графических объектов в режиме реального времени.

Библиографический список

1. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
2. Косников Ю.Н. Методика и технология компьютерного моделирования поверхностей свободных форм с применением радиальных базисных функций // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Серия: Технические науки. Информационные технологии. – Пенза: Изд-во ПГТУ, 2014. – №03(19). – С. 176–183.
3. Franke R. A Critical Comparison of Some Methods for Interpolation of Scattered Data. PhD thesis. – Naval Postgraduate School Monterey. – California, 1979. – 379 p.

Косников Юрий Николаевич
Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
E.mail: kosnikov@gmail.com

Kosnikov Y.N.
Penza State University,
Penza, Russia