

Федотов Н.Г., Сёмов А.А, Крючкова Е.А. Опорные сетки на сфере и оценка их равномерности. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XV Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2015. – С. 127-134.

УДК 004.93
ББК 32.81

ОПОРНЫЕ СЕТКИ НА СФЕРЕ И ОЦЕНКА ИХ РАВНОМЕРНОСТИ

Н.Г. Федотов, А.А Сёмов, Е.А. Крючкова

SUPPORT GRIDS ON THE SPHERE AND EVALUATION OF THEIR UNIFORMITY

N.G. Fedotov, A.A. Syemov, E.A. Kryuchkova

Аннотация. Статья посвящена теме конструирования равномерного распределения точек на сфере. Данная проблема находит свое отражение при распознавании 3D изображений. Проведен обзор методов построения равномерной сетки на сфере. Указаны преимущества и недостатки данных методов. Описаны конкретные способы стохастического генерирования точек на сфере. Показаны визуальные примеры. Приводятся экспериментальные оценки равномерности построенного множества точек на сфере с использованием разных критериев.

Ключевые слова: распознавание 3D изображений, равномерное распределение, опорная сетка на сфере, стохастическое конструирование точек на сфере.

Abstract. This article is dedicated to a theme of constructing a uniform distribution of points on the sphere. This problem is relevant for 3D images recognition. An methods overview for constructing of a uniform grid on a sphere is performed. Advantages and limitations of these methods are indicated. Specific ways of stochastic generating of points on the sphere are described. Visual examples are showed. Experimental evaluations of the uniformity of the constructed points set on the sphere using different criteria are provided.

Keywords: 3D image recognition, uniform distribution, support grid on the sphere, the stochastic construction of points on the sphere.

Для современного этапа развития теории распознавания образов актуально расширение круга рассматриваемых задач распознавания на 3D изображения, в то время как ранее внимание исследователей было сосредоточено на решении задач анализа и распознавания 2D изображений.

Среди различных задач, которые возникают при распознавании 3D изображений, важное место занимает проблема достижения их инвариантного описания и распознавания. Данная проблема может быть решена посредством равномерного сканирования пространственного объекта со всех сторон. Один из таких методов – 3D трейс-преобразование, который был предложен в работе [1]. Для достижения равномерного сканирования пространственного объекта (распознавание 3D изображений [2–4]) и плоских сечений, получаемых плоскостями (распознавание 2D изображений [5–7]), необходимо построить равномерное распределение точек на поверхности сферы (согласно работе [8]).

Опишем кратко некоторые наиболее известные и полезные варианты построения опорной сетки на сфере с равномерным распределением точек на её поверхности с точки зрения особенностей выбранного метода сканирования 3D изображений. Описание многих известных методов по этой теме можно найти в [9].

Различные виды опорных сеток на сфере и анализ их свойств

Для дискретного случая на обычной карте глобуса вблизи полюса наблюдается более плотное скопление точек, чем у экватора (алгоритм *Uniform_det*). Поэтому если при повороте полюс совместить с точкой на экваторе, то точки полярной области будут сильно удалены друг от друга, т.к. вдоль экватора точки наиболее пространственно удалены друг от друга. Отсюда следует, что при повороте сферы будут заметны сильные отклонения узлов исходной и повернутой сетки. В связи с этим необходимо другим способом построить опорную сетку, обладающую равномерным распределением (плотностью) точек на сфере.

Первый класс методов относится к стохастическим методам генерирования равномерного распределения точек на сфере. При конструировании точек на сфере стохастические методы используют генераторы псевдослучайных чисел с возможностью построения любого количества точек. Однако построение равномерной сетки возможно только при достаточно большом количестве точек, что не всегда оправданно.

Так, один из известных методов данного типа (алгоритм *Marsaglia_rnd*) описан в [10]. Идея алгоритма заключается в следующем: в цикле равномерно выбираются a и b из интервала $(0, 1)$, пока не выполнится условие $Sum = a^2 + b^2 < 1$. Затем генерируются точки с декартовыми координатами $(2a \cdot \sqrt{1 - Sum} \quad 2b \cdot \sqrt{1 - Sum} \quad 1 - 2 \cdot Sum)$.

Также широкое распространение получил алгоритм (алгоритм *Kwaternion_rnd*) на основе свойств кватернионов в четырёхмерном пространстве [11]. Так, каждая из координат четырёхмерной точки (x, y, z, w) равномерно выбирается из интервала $(0, 1)$. Далее определяется квадрат евклидова расстояния от этой точки до начала координат: $s = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. И если $s < 1$, то затем генерируются точки с декартовыми координатами $\left(\frac{2 \cdot (y \cdot w + x \cdot z)}{s} \quad \frac{2 \cdot (z \cdot w - x \cdot y)}{s} \quad \frac{x^2 + w^2 - y^2 - z^2}{s} \right)$. Иначе кватернионы генерируются заново.

Второй класс методов относится к детерминированным методам. Их очевидным преимуществом является построение заранее predetermined сетки на сфере, обладающей теми или иными свойствами. Однако каждый метод этого класса обладает определенным недостатком, и построение сетки возможно, как правило, не для любого количества точек. Ниже рассмотрены некоторые методы данного класса.

HEALPix – это универсальная структура для пикселизации данных о сфере, часто применяемая при работе с данными реликтового излучения [12]. Метод использует разбиение сферической поверхности на ячейки равной площади на разных широтах с целью нивелирования искажений на полюсах. Сфера разделяется изначально на 12 равных по площади участков, каждый из которых в дальнейшем иерархически делится на 4 части равной площади.

Получаемая эффективная дискретизация карты сферы дополнительно обладает свойством быстрого поиска и анализа конкретной области благодаря иерархической индексации участков сферы. Однако количество точек быстро растет с увеличением разрешения сетки, и построение сетки возможно не для любого количества точек.

Равномерное распределение точек на сфере можно получить при помощи спирали на ее поверхности (алгоритм *Saff_mod_fix*) [13]. Спираль приближается после-

довательностью точек, расстояние между которыми приблизительно равно расстоянию между витками. Данное распределение точек на сфере обладает очень низкой потенциальной энергией, что говорит о ее равномерности. Преимуществом данного метода является возможность построения сетки для любого количества точек. Недостатком данного метода является построение точек в области полюса, где наблюдается отклонение от истинного направления описывающей спирали.

Существует также целый класс различных вариантов разбиения сферы на треугольники, то есть триангуляция ее поверхности. И чем ближе треугольники к правильным равносторонним треугольникам, тем ближе сетка к равномерному распределению по поверхности сетки.

Как правило, при разбиении сферы на треугольники используются вписанные в сферу правильные многогранники с рекурсивным разбиением граней: например, икосаэдр (алгоритм *Icosahedron_det*). Однако возможно использование и других топологий сеток многогранников. Так, нулевое разрешение сетки имеет вид правильного многогранника, чья грань разделена изначально на некоторые одинаковые многоугольники. Например, если грань является треугольником, то она может быть разделена на три треугольника через центр грани, или на четыре треугольника с использованием середин ребер, или на девять треугольников посредством дробления ребер грани на три равных отрезка. Далее происходит дробление каждой грани на более мелкие треугольники по одной и той же схеме.

Третий класс методов относится к оптимизационным методам, которые находят экстремальное решение аналитически или с помощью многократных прогонов (итерационные методы). Данный класс методов очень часто использует физические модели, которые в большинстве случаев помогают найти глобальные оптимумы конфигурации точек. Однако, как правило, такие методы обладают значительными вычислительными затратами.

Например, поверхность сферы случайным образом заполняется электронами. Сила взаимодействия между частицами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (сила притяжения). При этом накладывается ограничение, чтобы электроны двигались только по поверхности сферы. Силы, возникающие при трении электронов о поверхность, игнорируются. Итеративное применение законов Гука-Кулона (по теореме Остроградского–Гаусса) дают приблизительно равномерное распределение электронов на сфере [14]. Устойчивое или неустойчивое состояние системы говорит о локальном или глобальном экстремуме.

Данная задача известна как проблема Томпсона о нахождении оптимального расположения точек с точки зрения выбранного критерия. Преимуществом предложенного метода является достижение оптимизации расположения точек с точки зрения выбранного критерия в зависимости от преследуемых целей. Недостатком метода является большой объем вычислений, производимых при определении глобального экстремума.

Экспериментальная оценка равномерности положения точек на сфере

В качестве оценки равномерности распределения N точек множества M_N на сфере возьмем следующие критерии [15]:

1. Минимум потенциальной энергии множества точек.

Так, для любого действительного α для N точек множества M_N на поверхности сферы α -энергия определяется как

$$E(\alpha, M_N) := \begin{cases} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \log \frac{1}{\text{dist}(X_i, X_j)}, & \text{if } \alpha = 0, \\ \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{dist}(X_i, X_j)^\alpha, & \text{if } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

где $\text{dist}(X_i, X_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ – евклидово расстояние между двумя точками X_i и X_j на поверхности сферы S^2 .

Экстремальное значение энергии для N точек находится как:

$$\varepsilon(\alpha, N) := \begin{cases} \inf_{M_N \subset S^2} E(\alpha, M_N), & \text{if } \alpha \leq 0 \\ \sup_{M_N \subset S^2} E(\alpha, M_N), & \text{if } \alpha > 0 \end{cases}$$

2. Наибольшее удаление ближайших точек друг от друга. Идея данного критерия вытекает из следующих соображений. Если множество точек на сфере обладает равномерным распределением, то приблизительно и равны расстояния между ближайшими соседями (как длины ребер выпуклого многогранника, вписанного в сферу, вершины которого являются узлами опорной сетки). Однако, если распределение немного отличается от равномерного, то будут наблюдаться колебания длин ребер данного выпуклого многогранника. Максимальная длина ребра и покажет ту область на сфере, которая меньше всего покрыта точками и где наблюдает наихудшее отклонение от равномерного распределения точек.

Так, на сферу бросается случайным образом некоторое множество точек L_K количеством K (например, $K=100$). Далее для каждой генерируемой точки L_j находится ближайшее расстояние среди всех евклидовых расстояний между ней и точками исходного множества M_N . Далее среди подсчитанных минимальных значений расстояний для каждой точки множества L_K вычисляется максимальное значение:

$$\text{MaxRo}(\alpha, N) := \sup_{j, L_K \subset S^2} \left(\inf_{i, M_N \subset S^2} \text{dist}(L_j, M_i) \right).$$

Данное максимальное значение характеризует область на сфере, для которой характерна наибольшая отдаленность точек друг от друга.

Ниже показаны результаты проведенного эксперимента по оценке равномерности построенного распределения точек на поверхности сферы (таблица 1). Для стохастического способа генерирования точек (для алгоритмов *Marsaglia_rnd* и *Knut_rnd*), эксперимент повторялся 1000 раз, после чего полученные значения усреднялись. Соответственно для детерминированного способа генерирования точек (для алгоритмов *Uniform_det*, *Icosahedron*, *Saff_mod_fix*), как и для итерационного способа конструирования точек (для алгоритма *Tompson*), эксперимент повторялся один раз. Всего строилось 42 точки на сфере.

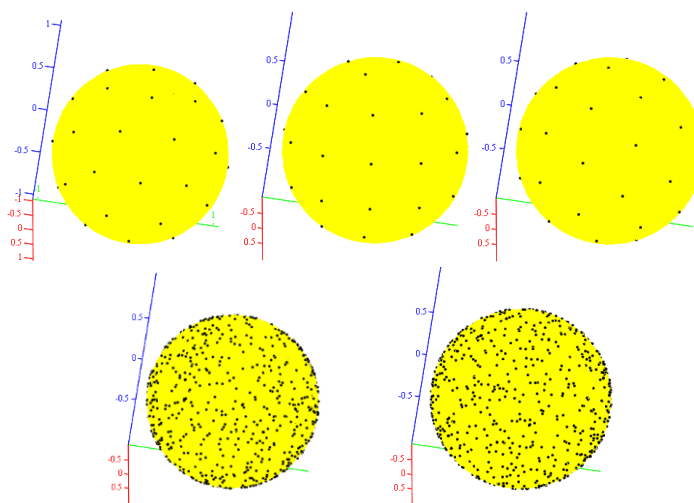
Оценка равномерности множества точек на сфере

Название алгоритма	α -энергия	MaxRo
<i>Uniform_det</i>	5621.18	0.2723
<i>Icosahedron</i>	5638.78	0.22189
<i>Saff_mod_fix</i>	5638.64	0.24964
<i>Tompson</i>	5638.80	0.23118
<i>Marsaglia_rnd</i>	5583.02	0.44666
<i>Kwaternion_rnd</i>	5580.10	0.45369

Как видно из результатов, предложенных в таблице, по всем критериям наилучшим оказался итерационный метод *Tompson*. Однако построение равно-

мерной сетки на сфере данным методом сопряжено с огромными вычислительными затратами, что не всегда оправдано на практике. Детерминированные методы дают лучшие результаты по сравнению со стохастическими методами, что можно объяснить малым количеством N исходного множества точек M_N . При увеличении N наблюдаемая картина станет полностью противоположной: случайное распределение точек на сфере будет более предпочтительным, чем их фиксированная структура.

Также стоит отметить, что первый критерий говорит о средней равномерности расположения всего множества точек на всей поверхности сферы, тогда как второй критерий указывает лишь область сферы, где наблюдается наихудшая равномерность расположения точек (наибольшее удаление точек друг от друга). Поэтому в разных задачах оптимальными будут разные равномерные сетки на сфере (в зависимости от преследуемых целей).



Построение равномерной сетки на сфере детерминированными (верхний ряд слева направо: Icosahedron, Saff_mod_fix, Tompson для $N=42$) и стохастическими способами (нижний ряд слева направо: Marsaglia_rnd, Kwartention_rnd для $N=1000$)

На рисунке приведены примеры детерминированного, итерационного и стохастического способов построения точек на сфере, обладающих равномерной плотностью.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект №15-07-04484).

Библиографический список

1. Fedotov N.G. Trace transform of three-dimensional objects: recognition, analysis and database search / N.G. Fedotov, S.V. Ryndina, A.A. Semov // Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications, 2014. – Vol. 24. – No. 4. – P. 566–574.

2. Семов А.А. Об одном подходе к распознаванию 3D-изображений // Надежность и качество : труды Междунар. симпозиума. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. – Т. 1. – С. 350–351.

3. Семов А.А. Экспериментальная проверка свойств 3D трейс-преобразования // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Серия: технические науки. Информационные технологии. – 2014. – №03(19). – С. 83–89.

4. Сёмов А.А. Основные методы построения гипертрейс-матриц // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Серия: технические науки. Информационные технологии. – 2015. – №03(25). – Т. 1. – С. 69–76.

5. Fedotov N.G. The theory of image-recognition features based on stochastic geometry // Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications. – 1998. – Vol. 8. – No. 2. – P. 264–266.

6. Fedotov N.G., Mokshanina D.A. Recognition of halftone textures from the standpoint of stochastic geometry and functional analysis // Pattern Recognition and Image Analysis, Advances in Mathematical Theory and Applications. – 2010. – Vol. 20. – No. 4. – P. 551–556.

7. Fedotov N.G., Mokshanina D.A. Recognition of images with complex half-tone texture // Measurement Techniques. – 2011. – Vol. 53. – No. 11. – P. 1226–1232.

8. Fedotov N.G., Ryndina S.V., Syemov A.A. Trace transform of spatial images // Processings of the 11th International conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information technologies (PRIA-11-2013), Samara: IPSI RAS (Vol. I-II), 2013, Vol. I, P. 186–189.

9. The MathWorld Wolfram Web Resource about different mathematical information – Режим доступа: <http://mathworld.wolfram.com/Sphere-PointPicking.html>.

10. Marsaglia G. Choosing a Point from the Surface of a Sphere // The Annals of Mathematical Statistics, 1972. – Vol. 43. – No. 2. – P. 645–646.

11. Altmann S.L. Rotations, Quaternions, and Double Groups. – Mineola, New York: Dover Press, 2005. – 203 p.

12. Gorski K.M. HEALPix: A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere / K.M. Gorski, E. Hivon, A.J. Banday, B.D. Wandelt, F.K. Hansen, M. Reinecke, M. Bartelmann // The Astrophysical Journal, 2005. – Vol. 622. – No. 2. – P. 759–771.

13. Rakhmanov E.A., Saff E.B., Zhou Y.M. Minimal Discrete Energy on the Sphere // Mathematical Research Letters. – 1994. – Vol. 1. – No. 6. – P. 647–662.

14. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Электричество и магнетизм (в 3-х томах). – Т. II. – М.: Наука, 1972. – 366 с.

15. Ashby, N. Thomson's Problem / N. Ashby, W.E. Brittin // American Journal of Physics, 1986. – Vol. 54. – No. 9. – P. 776–777.

Федотов Николай Гаврилович

Пензенский государственный
университет, г. Пенза, Россия
E-mail: fedotov@pnzgu.ru

Fedotov N.G.

Penza State University,
Penza, Russia

Сёмов Алексей Александрович

Пензенский государственный
университет, г. Пенза, Россия
E-mail: mathematik_aleksey@mail.ru

Syemov A.A.

Penza State University,
Penza, Russia

Крючкова Елена Алексеевна

Пензенский государственный
университет, г. Пенза, Россия
E-mail: ec@pnzgu.ru

Kryuchkova E.A.

Penza State University,
Penza, Russia