

Сёмов А.А. Построение оптимальной стохастической равномерной сетки на сфере, инвариантной к повороту 3D изображения в пространстве. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XV Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2015. – С. 134-141.

УДК 004.93
ББК 32.81

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ РАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ НА СФЕРЕ, ИНВАРИАНТНОЙ К ПОВОРОТУ 3D ИЗОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

А.А. Сёмов

BUILDING OPTIMAL STOCHASTIC UNIFORM GRID ON THE SPHERE THAT ARE INVARIANT TO THE ROTATION 3D IMAGE IN SPACE

A.A. Syemov

Аннотация. Статья посвящена проблеме анализа и распознавания 3D изображений. Обосновывается актуальность данной темы. Описывается и анализируется проблема инвариантности распознавания 3D изображения при его произвольной ориентации в пространстве. Для ее решения вводится понятие «опорной сетки на сфере». Обосновывается необходимость конструирования равномерного распределения точек на сфере. Приводится описание функции плотности распределения точек на сфере в зависимости от их сферических координат. Даются некоторые замечания по поводу построения стохастического равномерного распределения точек на сфере.

Ключевые слова: распознавание 3D изображений, инвариантное описание 3D изображения, равномерное распределение, опорная сетка на сфере, стохастическое конструирование точек на сфере.

Abstract. This article is dedicated to a problem of 3D images analysis and recognition. In the introduction actuality of given theme are substantiated. The problem of 3D image recognition invariance when image has an arbitrary orientation in space are described and analyzed. To solve it the concept of " support grid on the sphere" is introduced. The necessity for construction of a uniform points distribution on the sphere is substantiated. The description of a density function of distribution points on the sphere, depending on their spherical coordinates is provided. In conclusion, some remarks relative to construction of stochastic uniform points distribution on the sphere are given.

Keywords: 3D image recognition, 3D images invariant description, uniform distribution, support grid on the sphere, the stochastic construction of points on the sphere.

Одной из главных проблем современной информатики является анализ и распознавание трехмерных (далее 3D) изображений. По сравнению с двумерными (далее 2D) изображениями они наиболее полно отражают информацию об изменениях объектов с течением времени, точнее описывают их свойства [1].

Инвариантное описание изображения является более предпочтительным, чем определение параметров ориентации объекта с последующей нормализацией его положения, так как позволяет извлекать признаки, более устойчивые к координатному шуму и линейным искажениям [2].

Однако вопросам создания инвариантного описания 3D изображений и возможностям его комплексного анализа было уделено недостаточно внимания исследова-

телей. В большинстве публикаций по данной проблеме рассматриваются теоретические подходы, обладающие теми или иными ограничениями, которые не позволяют достичь инвариантности распознавания к группе движений и масштабированию 3D изображений с одновременной возможностью извлечения их различных характеристик.

Проблема инвариантности распознавания 3D изображения при его произвольной ориентации в пространстве

Для трехмерного случая наличие произвольной пространственной ориентации 3D изображения сильно осложняет создание его инвариантного описания. В отличие от двумерного случая, проблема поворота 3D изображения в трехмерном пространстве связана с невозможностью его поворота вокруг одной оси, независимо от совершённого вращения по другим осям [3]. Данное обстоятельство видно из следующего примера.

Так, любое вращение в трехмерном пространстве может быть представлено в виде композиции поворотов вокруг трех ортогональных декартовых осей, которые задаются матрицами поворота:

$$M_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, M_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, M_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы поворота не обладают свойством коммутативности, то перемна матриц местами изменит положение объекта с одного на другое. В общем случае ориентация пространственного объекта, получаемая в результате последовательности конечных поворотов, зависит от порядка выполнения этих поворотов.

Таким образом, необходимо разработать такую схему сканирования 3D изображения, чтобы результаты ее применения не зависели бы от пространственной ориентации анализируемого объекта.

Прежде чем переходить к описанию положения сканирующих элементов и исследованию указанного выше свойства, необходимо сначала ввести их описание. Пусть F – исходная трехмерная модель. Определим плоскость $B(\eta, r) = \{x/x^T \cdot \eta = r\}$ как касательную к сфере центром в начале координат и с радиусом r , проходящую через заданную точку X и на расстоянии r от начала координат с заданными углами ω и φ , где $\eta = [\cos \omega \cdot \sin \varphi, \sin \omega \cdot \sin \varphi, \cos \varphi]$ – единичный вектор в R^3 , ω – угол между осью $0x$ и проекцией отрезка OX на плоскость $0xy$, φ – угол между осью $0z$ и отрезком OX .

Сканирование 3D изображения будет осуществляться плоскостями. Данный выбор оправдан тем, что пересечение плоскости с любым другим пространственным геометрическим примитивом хорошо известно в высшей математике и имеет строгое аналитическое представление, которое нам пригодится при разработке аналитической структуры признака. Кроме того, наличие сетки параллельных плоскостей помогает решить проблему инвариантного описания объекта (дает необходимое условие для конструирования признаков, инвариантных к переносу 3D изображения). Если пространственный объект сканируется сеткой параллельных плоскостей, то перемещение исходного 3D изображения не изменяет форму получаемых сканирующими плоскостями сечений (дискретный шаг ска-

нирования игнорируется). Поэтому получаемые сечения и извлекаемые на их основе признаки не изменяют своего значения при переносе 3D изображения на любой вектор в пространстве. Другими словами, вычисляемые признаки не будут зависеть от пространственного положения объекта.

Итак, чтобы схема сканирования 3D изображения не была привязана к пространственной ориентации объекта, необходимо и достаточно, чтобы сканирующие элементы, если все их одновременно зафиксировать в пространстве, давали одинаковые сечения трехмерного объекта при любом его угле вращения. Другими словами, необходимо добиться, чтобы все сканирующие сетки параллельных плоскостей под разными углами обзора ω и φ распознаваемого 3D изображения совпадали друг с другом при любом его пространственном повороте (дискретный шаг игнорируется).

Стандартный перебор всех углов ω и φ , которыми идентифицируется каждая сканирующая сетка параллельных плоскостей, в топологическом смысле для непрерывного случая дает модель концентрических сфер с центром в начале координат. Каждой сканирующей сетке параллельных плоскостей на единичной сфере сопоставим точку, которая будет являться точкой касания со сферой плоскости, параллельной плоскостям данной сетки (отдельно для каждой пары (ω, φ) углов обзора). Множество точек на сфере образуют сетку, которую будем называть опорной (рис. 1).

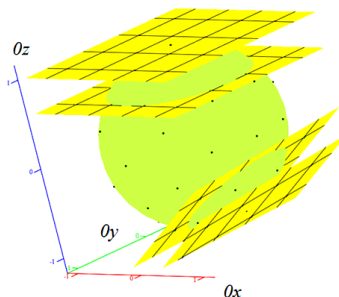


Рис. 1. Опорная сетка на сфере и соответствующие ей сетки сканирующих параллельных плоскостей

Стоит отметить, что пара углов (ω, φ) однозначно определяет узел опорной сетки, соответствующий единственной касательной плоскости к сфере в этой точке, а значит, и единственной сетке сканирующих параллельных плоскостей.

Для дискретного случая на обычной карте глобуса вблизи полюса наблюдается более плотное скопление точек, чем у экватора. Поэтому если при повороте полюс совместить с точкой на экваторе, то будут заметны отклонения точек исходной и повернутой сеток. Так как каждая точка опорной сетки на сфере однозначно определяет угол наклона сетки параллельных плоскостей, то изменение угла наклона сетки плоскостей повлияет на форму получаемых сечений. Вследствие этого увеличится ошибка расчёта признака и снизится точность распознавания 3D объекта.

С другой стороны, если при повороте сферы вокруг своего центра опорная сетка перейдет сама в себя, то соответствующие сетки секущих параллельных плоскостей полностью совпадут друг с другом и получаемые сечения будут одинаковыми (не изменят своей формы). Поэтому вычисляемое значение признака не изменится.

Таким образом, необходимо построить опорную сетку, обладающую равномерным распределением точек на сфере для достижения меньшей ошибки совмещения

узлов опорной сетки при ее повороте из-за дискретного шага сканирования. Равномерное распределение точек опорной сетки на сфере обеспечит отсутствие более плотных скоплений узлов опорной сетки на поверхности сферы, определяющих преимущественно сечения под теми или иными углами обзора объекта. В связи с этим, все результаты сканирования будут принимать равноправное участие при вычислении значения признака 3D изображения без повышения влияния каких-либо определенных значений сечений, так как частота появления любого среза сечений будет приблизительно одинакова (равномерный обзор трехмерного тела со всех сторон). Другими словами, значение вычисляемого признака не будет зависеть от ориентации 3D изображения в пространстве.

Построение равномерной сетки на сфере

Указанное свойство равномерного распределения точек опорной сетки на сфере является необходимым условием инвариантности конструируемых признаков к повороту. Математическая модель построения данной сетки имеет следующий вид.

Рассмотрим сферу, заданную параметрически: $x(\omega, \varphi) = R \cdot \cos \omega \cdot \sin \varphi$, $y(\omega, \varphi) = R \cdot \sin \omega \cdot \sin \varphi$, $z(\omega, \varphi) = R \cdot \cos \varphi$. Необходимо определить аналитически функцию $f(\omega, \varphi)$ плотности совместного распределения параметров ω и φ , соответствующую равномерному распределению точек на поверхности сферы.

Рассмотрим небольшой участок dS поверхности сферы, ограниченный приращениями $d\varphi$ и $d\omega$ (рис. 2).

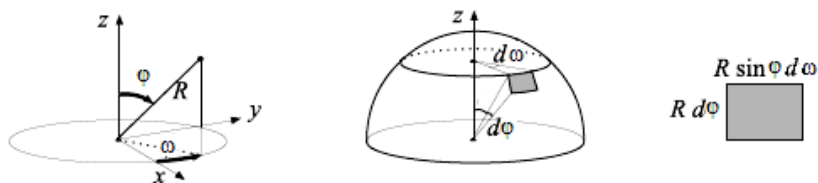


Рис. 2. Участок на поверхности сферы и значение его сторон

В случае, когда точки имеют равномерное распределение на поверхности сферы, вероятность попадания произвольной точки A на элемент поверхности dS с одной стороны равна:

$$P(A \subset dS) = \frac{dS}{S}.$$

При постоянном значении φ изменение угла $d\omega$ описывает дугу $R \cdot \sin \varphi \cdot d\omega$. Поэтому площадь малого элемента поверхности сферы равна $dS = R^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot d\omega \cdot d\varphi$. Таким образом, вероятность попадания произвольной точки A на элемент поверхности dS будет равна:

$$P(A \subset dS) = \frac{R^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot d\omega \cdot d\varphi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \cdot d\omega \cdot d\varphi} = \frac{R^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot d\omega \cdot d\varphi}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{\sin(\varphi) \cdot d\omega \cdot d\varphi}{4\pi}.$$

С другой стороны, вероятность попадания точки A на данный элемент поверхности равна: $P(A \subset dS) = f(\omega, \varphi) \cdot d\omega \cdot d\varphi$. Следовательно, совместная плотность распределения вероятности ω и φ равна:

$$\frac{\sin(\varphi) \cdot d\omega \cdot d\varphi}{4\pi} = f(\omega, \varphi) \cdot d\omega \cdot d\varphi \Rightarrow f(\omega, \varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{4\pi}.$$

Генерируя значения параметров ω и φ с использованием функции $f(\omega, \varphi)$, будем получать равномерное распределение точек на поверхности сферы.

Итак, необходимость разработки строгого равномерного распределения на сфере обусловлена тем фактом, что при малом количестве точек известные стохастические способы построения сеток на сфере (например, метод G. Margalia [4], метод на основе кватернионов [5] дают плохое приближение равномерной сетки на сфере. Данное обстоятельство хорошо проиллюстрировано на рис. 3.

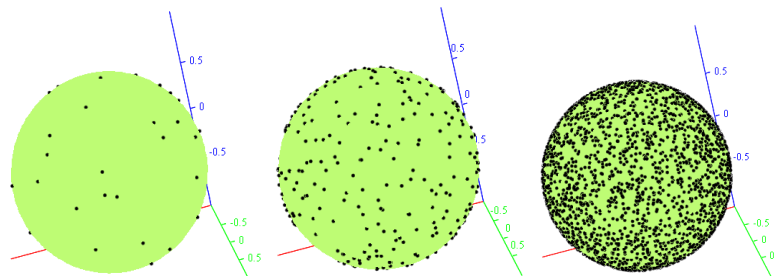


Рис. 3. Построение случайного равномерного распределения точек на сфере алгоритмом Margalia при $N=40$ (слева), при $N=400$ (в центре) и при $N=4000$ (справа)

В настоящей статье затронут и описан лишь один аспект проблемы, связанной с разработкой нового метода анализа и распознавания 3D изображений, инвариантных к группе движений и масштабированию – 3D трейс-преобразование, основанное на положениях стохастической геометрии и функционального анализа [6]. Анализ других аспектов данной проблемы можно найти в работах [7-12].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект №15-07-04484).

Библиографический список

1. Witten I.H. Data mining: practical machine learning tools and techniques (the Morgan Kaufmann series in data management systems) / I.H. Witten, E. Frank, M.A. Hall. – third edition. – Burlington, Massachusetts: Morgan Kaufmann, 2011. – 664 p.
2. Федотов Н.Г. Теория признаков распознавания образов на основе стохастической геометрии и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
3. Liu K. Rotation-invariant HOG descriptors using fourier analysis in polar and spherical coordinates / K. Liu, H. Skibbe, T. Schmidt, T. Blein, K. Palme, T. Brox, O. Ronneberger // International Journal of Computer Vision, 2014. – Vol. 106. – Issue 3. – P. 342–364.
4. Marsaglia G. Choosing a Point from the Surface of a Sphere // The Annals of Mathematical Statistics, 1972. – Vol. 43. – No. 2. – P. 645–646.
5. Altmann S.L. Rotations, Quaternions, and Double Groups / S.L. Altmann. – Mineola, New York: Dover Press, 2005. – 203 p.
6. Fedotov N.G. Trace transform of three-dimensional objects: recognition, analysis and database search / N.G. Fedotov, S.V. Ryndina, A.A. Semov // Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications, 2014. – Vol. 24. – No. 4. – P. 566–574.
7. Семов А.А. Экспериментальная проверка свойств 3D трейс-преобразования // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего – плюс. Серия: Технические науки. Информационные технологии. – 2014. – №03(19). – С. 83-89.

8. Сёмов, А.А. Основные методы построения гипертрейс-матриц // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Серия: Технические науки. Информационные технологии. – 2015. – №03(25). – Т. 1. – С. 69–76.

9. Fedotov N.G. The theory of image-recognition features based on stochastic geometry // Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications. – 1998. – Vol. 8. – No. 2. – P. 264–266.

10. Fedotov N.G., Mokshanina D.A. Recognition of halftone textures from the standpoint of stochastic geometry and functional analysis // Pattern Recognition and Image Analysis, Advances in Mathematical Theory and Applications. – 2010. – Vol. 20. – № 4. – P. 551–556.

11. Fedotov N.G., Mokshanina D.A. Recognition of images with complex half-tone texture // Measurement Techniques. – 2011. – Vol. 53. – No. 11. – P. 1226–1232.

12. Fedotov N.G. Trace transform of spatial images / N.G. Fedotov, S.V. Ryndina, A.A. Syemov // Processings of the 11th International conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information technologies (PRIA-11-2013), Samara: IPSI RAS (Vol. I-II), 2013, Vol. I. – P. 186–189.

Сёмов Алексей Александрович
Пензенский государственный
университет, г. Пенза, Россия
E-mail: mathematik_aleksey@mail.ru

Syemov A.A.
Penza State University,
Penza, Russia