

УДК 519.6

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.А. Горбунов, С.В. Сотников

THE SMALL PARAMETER METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

D.A. Gorbunov, S.V. Sotnikov

Аннотация. Описываются дискретные и непрерывные схемы численного решения нелинейных уравнений. Предлагается метод малого параметра, позволяющий определить корни нелинейных уравнений без этапа локализации корней. Приведен алгоритм и результаты решения на примере квадратурной формулы Гаусса.

Ключевые слова: дискретные и непрерывные схемы численного решения нелинейных уравнений, метод малого параметра.

Abstract. The article deals with discrete and continuous numerical schemes for solving nonlinear equations. A small parameter method, which allows to determine the non-linear equations roots without roots localization stage is proposed. The algorithm and the decision results based on the example of Gauss quadrature formula are shown.

Keywords: discrete and continuous numerical schemes for solving nonlinear equations. The small parameter method.

Итерационные методы решения нелинейных уравнений вида

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

на отрезке $x \in [a, b]$ можно разбить на две группы [1-4]:

- дискретные схемы решения;
- непрерывные схемы решения.

К дискретным схемам решения можно отнести такие методы, как: метод простых итераций, метод Ньютона, модифицированный метод Ньютона и другие. Их основными недостатками являются:

- зависимость от начальных условий или интервала нахождения корня;
- сравнительно низкая скорость нахождения решения;
- нет правил перехода от корня к корню уравнения (1) в случае, если их несколько.

Добавим, что в последнем случае корни необходимо отделить друг от друга и затем на каждом из полученных интервалов вышеперечисленными методами уточнять единственный корень. Это является достаточно трудоемкой процедурой в случае большого количества корней на отрезке [4].

При применении непрерывных схем для решения уравнения (1) процесс нахождения корней осуществляется путем решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(f(x), f'(x)).$$

(2)

Пусть функция $f(x)$ определена и монотонна при $x > 0$ и существует конечная производная $f'(x)$. Задачу нахождения корней уравнения (1) можно рассматривать как предел при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = -f(x), x(0) = x_0, \quad (3)$$

если этот предел существует. Обозначим через $x = x(t)$ решение задачи Коши (3), x^* – искомое решение уравнения (1). Тогда должно иметь место тождество $\frac{dx^*}{dt} = -f(x^*)$. Вводя обозначение для отклонения $z(t) = x(t) - x^*$ и вычитая из (3) последнее уравнение, имеем

$$\frac{dz}{dt} = -(f(x) - f(x^*)). \quad (4)$$

Разлагая $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x^* с сохранением линейных членов $f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$ и подставляя полученное выражение в уравнение (4), получаем дифференциальное уравнение в отклонениях $\frac{dz}{dt} = -f'(x^*)z$, решение которого имеет вид

$$z(t) = Ce^{-f'(x^*)t}.$$

Условием сходимости $x(t)$ к корню x^* является требование $f'(x^*) > 0$, так как в этом случае $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и, следовательно, $x(t) \rightarrow x^*$. Считая, что $f(x)$ монотонна при $x > 0$, последнее уравнение можно распространить на всю рассматриваемую область. Таким образом, условием применения непрерывной схемы решения задачи Коши (3) является

$$f'(x) > 0. \quad (5)$$

Непрерывные схемы решения обладают более высокой скоростью нахождения решения и более высокой точностью по сравнению с соответствующими дискретными схемами. Но проблема зависимости от начальных условий и отсутствия правил перехода от корня к корню остается открытой.

Как видно из задачи Коши (3) и уравнения (1), левая часть последнего заменяется производной $\frac{dx}{dt}$. Данная замена является грубым приближением решения задачи (3) к решению задачи (1). Это влечет за собой не только большую погрешность при вычислениях, но и снижение скорости расчетов.

Перепишем уравнение (1) в виде [1,2]:

$$\mu \frac{dx}{dt} = -f(x), \quad (6)$$

где μ – малый положительный параметр, $\mu \rightarrow 0$.

Переход от задачи (1) к задаче (6) теоретически обоснован, так как интегральные кривые, являющиеся решением уравнения с малым параметром (6), проходят через все решения уравнения (1). Задачу нахождения корней этого уравнения с помощью сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения можно

рассматривать как предел при $t \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow 0$ решения задачи Коши вида

$$\mu \frac{dx}{dt} = -f(x), x(0) = x_0,$$

если этот предел существует.

Рассуждая аналогично, получим, что решение уравнения (6) в точке x^* будет иметь вид:

$$z(t, \mu) = Ce^{-\frac{f(x^*)t}{\mu}}.$$

В силу того, что $\mu > 0$, условие сходимости (5) останется прежним.

Полученная модификация классических схем решения не зависит от начальных условий и обладает более высокой точностью решения.

В качестве примера рассмотрим приближенное вычисление собственных определенных интегралов вида

$$\int_a^b f(x) dx$$

с помощью квадратурной формулы Гаусса. В ее основе положено вычисление полиномов Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], n = 0, 1, 2, \dots$$

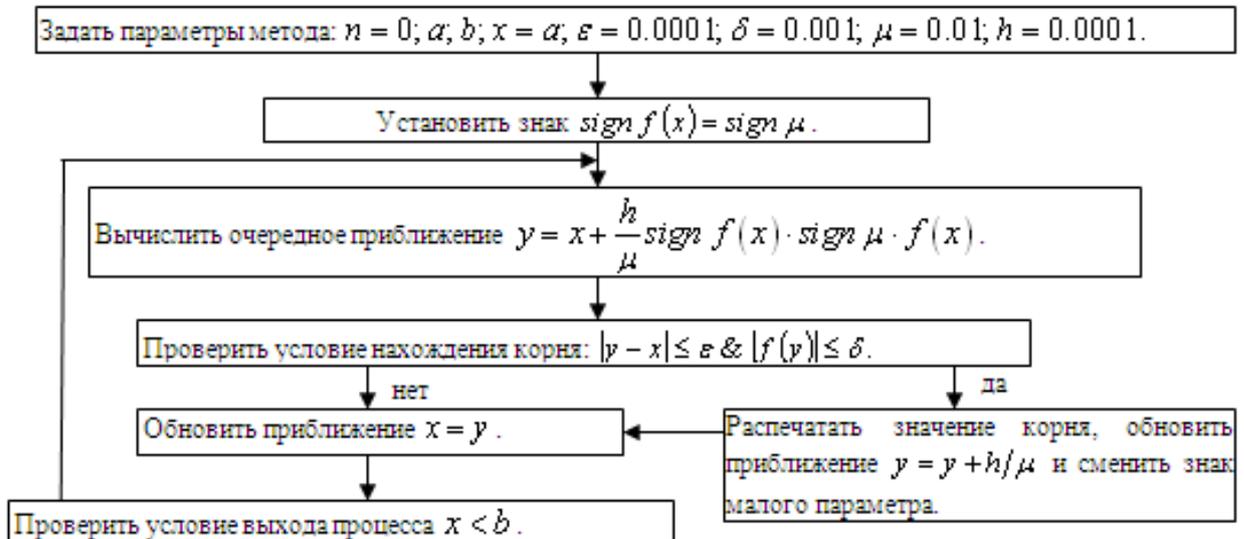
Для увеличения точности решения выведены полиномы Лежандра до восьмого порядка точности вида:

$$P_8(x) = 4290 \cdot x^8 - 8673 \cdot x^6 + 5530 \cdot x^4 - 1145 \cdot x^2 + 38. \quad (7)$$

Заметим, что при применении дискретных схем необходимо предварительно локализовать корни друг от друга, т.е. определить 8 интервалов нахождения корней, что является достаточно трудоемкой процедурой. С применением аналитического метода отделения корней и достаточного условия сходимости метода Ньютона найдены следующие восемь отрезков: $x \in [-1, -0.96]$, $x \in [-0.84, -0.82]$, $x \in [-0.571, -0.56]$, $x \in [-0.2018, -0.18]$, $x \in [0.18, 0.2018]$, $x \in [0.56, 0.571]$, $x \in [0.82, 0.84]$, $x \in [0.96, 1.0]$. Для уточнения каждого корня с точностями $\varepsilon = 0.0001$; $\delta = 0.001$ был выбран самый быстродействующий метод – метод Ньютона, который показал следующие результаты: $x_1^* = -0.97529$, $x_2^* = -0.83977$, $x_3^* = -0.56974$, $x_4^* = -0.20170$, $x_5^* = 0.20169$, $x_6^* = 0.56974$, $x_7^* = 0.83977$, $x_8^* = 0.97529$.

Метод малого параметра позволяет обойтись без этапа отделения корней, а переходить сразу к этапу уточнения корней. Т.е. процесс поиска корней осуществляется от начала до конца отрезка.

Структурная схема метода малого параметра приведена на рисунке.



Разработана программа на языке программирования Pascal, реализующая данный метод. В результате работы программы были найдены все восемь корней нелинейного уравнения (7).

Библиографический список

1. Горбунов Д.А., Моисеев В.С. Метод малого параметра для решения задач анализа и синтеза проектных решений на базе неявно заданных функциональных зависимостей // ИВУЗ «Авиационная техника». 1998. №4. С. 3–10.
2. Горбунов Д.А., Моисеев В.С. Основы прикладной теории неявных математических моделей и методов: монография. Казань: РИЦ, 2012. 172 с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учеб. пособие / под ред. Б.П. Демидовича. СПб.: Лань, 2008. 400 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2007. 672 с.

Горбунов Дмитрий Алексеевич
 Казанский национальный
 исследовательский технический
 университет им. А.Н. Туполева –
 КАИ, г. Казань, Россия
 E-mail: gorbunov_dmitrij73@mail.ru

Gorbunov D.A.
 Kazan National
 Research Technical University
 named after A.N. Tupolev-KAI,
 Kazan, Russia

Сотников Сергей Викторович
 Казанский национальный
 исследовательский технический
 университет им. А.Н. Туполева –
 КАИ, г. Казань, Россия
 E-mail: sotnikov.pmi@kstu-kai.ru

Sotnikov S.V.
 Kazan National
 Research Technical University
 named after A.N. Tupolev-KAI,
 Kazan, Russia