Тхай Хо Хоанг Методика геометрического моделирования пространственных форм с применением интерполяции В-сплайнами. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVI Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2016. – С. 70-77.

УДК 004.925.8

# МЕТОДИКА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В-СПЛАЙНАМИ

Хоанг Тхай Хо

# THE TECHNIQUE OF GEOMETRIC MODELING OF SPATIAL FORMS USING B-SPLINE INTERPOLATION

Hoang Thai Ho

**Аннотация.** Методика основана на определении узлов В-сплайновой интерполяции, применение которых позволяет реконструированной кривой или поверхности точно проходить через исходные опорные точки, задающие геометрическую форму. Описаны примеры применения методики.

**Ключевые слова:** В-сплайн, интерполяция, опорная точка.

**Abstract.** The technique is based on determination of nodes a B-spline interpolation, which application allows the reconstructed curve or a surface to pass precisely through the initial reference points setting a geometric form. Examplesofapplicationofthistechniquearedescribed.

**Keywords:** B-spline, interpolation, referencepoint.

Во многих практических приложениях визуализации данных есть необходимость моделировать неаналитические криволинейные геометрические формы. Такая задача возникает при отображении изолиний, дорог и рек, траекторий движения объектов, рельефа местности, закона распределения физической величины по некоторой поверхности (например, распределения осадков на карте региона) и т.п. Неаналитические кривые и поверхности обычно задаются множествами характерных (опорных) точек. Тогда построение математической модели геометрической формы основывается на интерполяционных методах. Если целью моделирования является визуальное представлениеинформации человеку, то при выборе средств интерполяции нужно обеспечить сохранение топологической тенденции геометрической формы, другими словами, – обеспечить ее реалистичность, каким бы количеством опорных точек она ни задавалась. Кривая или поверхность должна быть гладкой и точно проходить через опорные точки. Кроме того, нужно обеспечить реализуемость визуального представления имеющимися графическими средствами, то есть известными в компьютерной графике способами повышения реалистичности внешнего вида объектов (закраска, текстурирование, затенение) и быстрыми алгоритмами визуализации с минимальным участием человека. Анализ показывает [1], что традиционные методы интерполяции зачастую не позволяют выполнить указанные требования.

В геометрическом моделировании широко применяется интерполяция сплайновыми кривыми и поверхностями. Среди них нужно отдать предпочтение В-сплайновым моделям [2]. В-сплайновые отсеки кривых и поверхностей легко сопрягаются в протяженные формы и имеют повышенную гладкость. Недостаток

B-сплайновой интерполяции заключается в том, что реконструированная кривая или поверхность не проходит через опорные точки, а только приближается к ним, что нарушает топологическую тенденцию формы. В литературе, например в [3], есть упоминания о возможности устранения указанного недостатка. Для этого нужно от исходных опорных точек перейти к новым, таким, что моделируемая с их помощью геометрическая форма точно пройдет через исходные опорные точки. Однако в литературе отсутствует описание какой бы то ни было рабочей методики отыскания новых опорных точек. В настоящей работе предлагается вариант и реализация такой методики.

В основу моделирования следует положить параметрическое описание геометрической формы, а в качестве параметров использовать координаты криволинейной системы координат, размещенной на реконструируемой кривой или поверхности. Такой подход позволяет строить модели геометрических форм, протяженных и локализованных в пространстве, имеющих замкнутую и незамкнутую конфигурацию. Их математическое описание в декартовой или сферической (полярной в случае кривой) системах координат, зачастую, сопряжено со значительными трудностями, особенно если оно представляется в виде многозначных функций. Условием применения параметрического описания геометрической формы является упорядоченность опорных точек. Поскольку исходные данные для визуализации формируются с участием человека, это условие, как правило, выполняется.

Параметрическое описание B-сплайнового отсека кривой с номером $i$, построенного на четырех опорных точках $RP_{i-1}, RP_i, RP_{i+1}, RP_{i+2}$, которые заданы векторами координат $\mathbf{p}_l = |x_l \quad y_l \quad z_l|$,где $l = (i-1), i, (i+1), (i+2)$,в матричной форме имеет вид [3]:

$$\mathbf{r} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

где $\mathbf{r} = |x \quad y \quad z|$ – вектор координат текущей точки отсека;

$\mathbf{T} = |t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1|$ – вектор степеней параметра $t$, $t = [0,1]$;

$\mathbf{P} = |\mathbf{p}_{i-1} \quad \mathbf{p}_i \quad \mathbf{p}_{i+1} \quad \mathbf{p}_{i+2}|$ – матрица, элементами которой являются векторы координат опорных точек;

$\mathbf{M}$ – базисная матрица B-сплайна:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Параметр $t$ определяет шаги по координатной оси одномерной криволинейной системы координат, размещенной на реконструируемой кривой. В координатной форме выражение (1) представляет собой три полинома третьей степени. При изменении параметра $t$ в интервале [0,1] формируется отсек кривой, начинающийся в окрестности т. $RP_i$ и оканчивающийся в окрестности т. $RP_{i+1}$, но в общем случае не проходящий через эти точки. Чтобы решить задачу точной интерполяции, нужно ввести новые опорные точки $RP_i^*, RP_{i+1}^*$, такие, что отсек пройдет через точки $RP_i, RP_{i+1}$. Условием такого прохождения является система уравнений, полученная подстановкой в выражение (1) значений $t = 0$ и $t = 1$:

$$|x_i \quad y_i \quad z_i| = |0 \quad 0 \quad 0 \quad 1| \cdot \mathbf{M} \cdot |\mathbf{p}_{i-1} \quad \mathbf{p}_i^* \quad \mathbf{p}_{i+1}^* \quad \mathbf{p}_{i+2}|^{\mathbf{T}}$$
$$|x_{i+1} \quad y_{i+1} \quad z_{i+1}| = |1 \quad 1 \quad 1 \quad 1| \cdot \mathbf{M} \cdot |\mathbf{p}_{i-1} \quad \mathbf{p}_i^* \quad \mathbf{p}_{i+1}^* \quad \mathbf{p}_{i+2}|^{\mathbf{T}}$$

где $\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{i+1}^*$ – векторы координат новых опорных точек.

Полученную систему уравнений можно записать в координатной форме. Для $i = 1$ получится система из двух уравнений с двумя неизвестными дающая однозначное решение:

$$4k_1^* + k_2^* = 6k_1 - k_0,$$
$$k_1^* + 4k_2^* = 6k_1 - k_2,$$

где $k$ -исходные координаты и $k^*$ новые координаты $(k^*, k = x, y, z)$.

При увеличении количества опорных точек количество уравнений системы увеличивается. В общем случае на множестве $PR$, включающем $N$ опорных точек, $PR = \{PR_0, PR_1, PR_2, \ldots, PR_{N-2}, PR_{N-1}\}$ можно построить $(N-3)$ отсека. Для нахождения их $(N-2)$ новых опорных точек можно записать в матричной форме систему уравнений

$$\mathbf{M1} \cdot \mathbf{P}^* = \mathbf{M2}, \tag{2}$$

где $\mathbf{P}^*$ – матрица векторов координат новых опорных точек $(\mathbf{P}^*)^{\mathbf{T}} = |\mathbf{p}_1^* \quad \mathbf{p}_2^* \quad \ldots \quad \mathbf{p}_{N-2}^*|$; $\mathbf{M1}$ – матрица коэффициентов при координатах новых опорных точек; $\mathbf{M2}$ – матрица свободных членов, включающих координатыисходных опорных точек. Решением (2) в матричной форме будет выражение

$$\mathbf{P}^* = (\mathbf{M1})^{-1} \cdot \mathbf{M2}. \tag{3}$$

Если можно найти обратную матрицу $(\mathbf{M1})^{-1}$, решение матричного уравнения (3) дает координаты новых опорных точек. Эти координаты дает и решение уравнения (2), например, методом Гаусса.

Параметрическое описание В-сплайнового отсека поверхности с номерами $i$ и $j$, построенного на 16 опорных точках

$$\begin{matrix} BP_{i-1,j-1}, & BP_{i-1,j}, & BP_{i-1,j+1}, & BP_{i-1,j+2}, \\ BP_{i,j-1}, & BP_{i,j}, & BP_{i,j+1}, & BP_{i,j+2}, \\ BP_{i+1,j-1}, & BP_{i+1,j}, & BP_{i+1,j+1}, & BP_{i+1,j+2}, \\ BP_{i+2,j-1}, & BP_{i+2,j}, & BP_{i+2,j+1}, & BP_{i+2,j+2}, \end{matrix}$$

которые заданы векторами координат $\mathbf{p}_{m,n} = |x_{m,n} \quad y_{m,n} \quad z_{m,n}|$, где $m = (i-1), i, (i+1), (i+2)$, $n = (j-1), j, (j+1), (j+2)$, в матричной форме имеет вид [2]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{V}^{\mathbf{T}}, \tag{4}$$

где $\mathbf{R} = |x \quad y \quad z|$ – вектор координат текущей точки отсекаповерхности;

$\mathbf{U} = |u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1|$ – вектор степеней параметра $u$, $u = [0,1]$;

$\mathbf{V} = |v^3 \quad v^2 \quad v \quad 1|$ – вектор степеней параметра $v$, $v = [0,1]$;

$\mathbf{P}$ – матрица, элементами которой являются векторы координат опорных точек:

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} p_{i-1,j-1} & p_{i-1,j} & p_{i-1,j+1} & p_{i-1,j+2} \\ p_{i,j-1} & p_{i,j} & p_{i,j+1} & p_{i,j+2} \\ p_{i+1,j-1} & p_{i+1,j} & p_{i+1,j+1} & p_{i+1,j+2} \\ p_{i+2,j-1} & p_{i+2,j} & p_{i+2,j+1} & p_{i+2,j+2} \end{vmatrix};$$

$\mathbf{N}$ – базисная матрица В-сплайна:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Параметры $u$ и $v$ определяют шаги вдоль каждого направления двухмерной криволинейной системы координат поверхности. В координатной форме выражение (4) представляет собой три бикубических полинома. При изменении параметров в интервале [0,1] формируется центральный отсек поверхности, приближающийся к опорным точкам $BP_{i,j}, BP_{i,j+1}, BP_{i+1,j}, BP_{i+1,j+1}$ и в общем случае не проходящий через них. Чтобы решить задачу точной интерполяции, нужно ввести новые опорные точки $BP^*_{i,j}, BP^*_{i,j+1}, BP^*_{i+1,j}, BP^*_{i+1,j+1}$,,такие, что отсек поверхности пройдет через исходные точки $BP_{i,j}, BP_{i,j+1}, BP_{i+1,j}, BP_{i+1,j+1}$.

Способ нахождения новых опорных точек для поверхности такой же, как для пространственной кривой. Условием прохождения является система из четырех уравнений, полученная подстановкой в выражение (4) пар значений $u = 0, v = 0$; $u = 0, v = 1$; $u = 1, v = 0$ и $u = 1, v = 1$:

$$\begin{aligned}
&|x_{i,j} \quad y_{i,j} \quad z_{i,j}| = |0 \ 0 \ 0 \ 1| \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot |0 \ 0 \ 0 \ 1|^{\mathbf{T}} \\
&|x_{i,j+1} \quad y_{i,j+1} \quad z_{i,j+1}| = |0 \ 0 \ 0 \ 1| \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot |1 \ 1 \ 1 \ 1|^{\mathbf{T}} \\
&|x_{i+1,j} \quad y_{i+1,j} \quad z_{i+1,j}| = |1 \ 1 \ 1 \ 1| \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot |0 \ 0 \ 0 \ 1|^{\mathbf{T}} \\
&|x_{i+1,j+1} \quad y_{i+1,j+1} \quad z_{i+1,j+1}| = |1 \ 1 \ 1 \ 1| \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot |1 \ 1 \ 1 \ 1|^{\mathbf{T}}
\end{aligned},$$

В системе уравнений $\mathbf{P}^*$ – матрица, содержащая векторы координат новых опорных точек $p^*_{i,j}, p^*_{i,j+1}, p^*_{i+1,j}, p^*_{i+1,j+1}$:

$$\mathbf{P}^* = \begin{vmatrix} p_{i-1,j-1} & p_{i-1,j} & p_{i-1,j+1} & p_{i-1,j+2} \\ p_{i,j-1} & p^*_{i,j} & p^*_{i,j+1} & p_{i,j+2} \\ p_{i+1,j-1} & p^*_{i+1,j} & p^*_{i+1,j+1} & p_{i+1,j+2} \\ p_{i+2,j-1} & p_{i+2,j} & p_{i+2,j+1} & p_{i+2,j+2} \end{vmatrix}.$$

Система из четырех уравнений с четырьмя неизвестными – координатами четырех новых опорных точек – дает однозначное решение. Для больших количеств опорных точек систему уравнений можно записать в матричной форме подобно (2). Решение этого матричного уравнения даёт координаты новых опорных точек.

Нахождение текущей точки В-сплайновой кривой (или поверхности) предполагает вычисление трех кубических функций параметра $t$ для кривой, трех бикубических функций параметров $u,v$ для поверхности. Вычисления содержат ресурсоемкие операции возведения в степень и перемножения. Вычислительная сложность В-сплайна может быть уменьшена путем применения метода конечных разностей[4].

При применении этого аппарата для пространственной кривой параметрическое описание В-сплайна (1) и (4) должно быть представлено в форме системы многочленов вида:

$$k = at^3 + bt^2 + ct + d,$$

где $k$ – координата текущей точки отсека, $k = x, y, z$; $a,b,c,d$ – коэффициенты формы отсека.

Для поверхности описание принимает форму системы многочленов вида:

$$k(u,v)=\frac{1}{36}\left[v^3 f1(u)+v^2 f2(u)+vf3(u)+ f4(u),\right]$$

где $k$ – значение координаты $(k=x,y,z)$ текущей точки поверхности; $f1(u), f2(u), f3(u), f4(u)$ – кубические функции параметра $u$, коэффициенты которых определяются координатами опорных точек и которые могут рассматриваться как функциональные коэффициенты функций параметра $v$. Применение метода конечных разностей позволяет вычислять координату текущей точки кривой или поверхности за три операции сложения.

Составная кривая, состоящая из B-сплайновых отсеков, не проходит через первую и последнюю опорные точки. Для отображения траектории объекта это недопустимо. Приблизить кривую к названным точкам позволяет применение аппарата кратных опорных точек. Его суть в том, что первая и последняя опорные точки в исходном наборе дублируются по два раза. Это означает, что для построения траектории, проходящей через $N$ опорных точек, используется множество из $(N+4)$ опорных точек. Составная поверхность, состоящая из B-сплайновых отсеков, также не проходит через крайниеопорные точки, что при проектировании объектов может являться нежелательным. Чтобы поверхность проходила через ***все*** исходные опорные точки, надо добавить несколько дополнительных крайних точек. Эти точки размещаются на небольшом расстоянии от крайних точек исходного множества, в том числе и в диагональных направлениях. Это означает, что для построения поверхности, проходящей через $M \times N$ опорных точек, используется множество из $(M+2)\times(N+2)$ опорных точек.

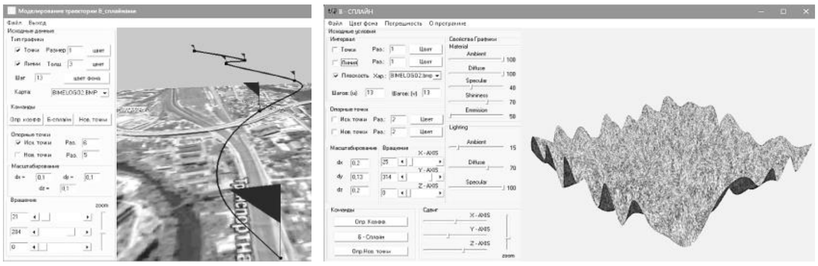
Методика построения пространственной кривой и поверхности с точным прохождением через заданные опорные точки состоит из следующих основных шагов:

- получение координат исходных опорных точек;
- добавление дополнительных крайних точек для поверхности или применение аппарата кратных точек для пространственной кривой;
- создание массива координат в соответствии с множеством исходных опорных точек;
- поиск новых опорных точек: создание и решение системы уравнений (3) методом Гаусса;
- вычисление промежуточных значений функций методом конечных разностей;
- построение кривой (или поверхности) по промежуточным точкам средствами графической библиотеки.

С применением приведенной методики разработаны программы отображения пространственной траектории объектов и поверхности. Их геометрия задана множеством опорных точек. Главные окна программ с полученными изображениями приведены на рисунке.

Анализ изображений показывает, что геометрические формы точно проходят через опорные точки и характеризуются гладкостью.

Применение методики возможно при наложении одного ограничения, которое можно считать недостатком. В уравнениях (2), (3), которые служат для вычисления новых опорных точек, должны одновременно присутствовать координаты



*а)* *б)*

*Изображения траектории, построенной на 6 опорных точках (а), и поверхности, построенной на 14×14 опорных точках (б)*

всех исходных опорных точек. Это означает, что для протяженных геометрических форм, задаваемых большим количеством опорных точек, решение уравнений требует значительных вычислительных ресурсов. Чтобы минимизировать этот недостаток, поверхность (кривую) нужно формировать по частям (фрагментам). Тогда возникает задача гладкого сопряжения фрагментов. Для решения этой задачи можно применить следующий прием. При формировании каждого последующего фрагмента в множество его исходных опорных точек нужно включить ряд опорных точек предыдущего фрагмента, то есть применить пересечение множеств опорных точек двух соседних фрагментов. Тогда начальные точки последующего фрагмента подойдут близко к конечным точкам предыдущего фрагмента, и общие граничные точки фрагментов можно будет получить усреднением координат граничных точек, найденных для каждого фрагмента. Величина погрешности интерполяции в этом случае зависит от величины зоны пересечения опорных точек фрагментов.

Библиографический список

1. Александрова Н.В., Зимин А.П., Косников Ю.Н., Хоанг Тхай Хо. Смешивающие функции в геометрическом моделировании и визуализации поверхностей свободных форм // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего$_{\text{плюс}}$. Серия: Технические науки. Информационные технологии. Пенза: Изд-во ПГТУ, 2015, №03(25). Т.1. С. 176–183.

2. Косников Ю.Н. Применение бикубических сплайнов в графических системах реального времени // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2005. №4(9). С. 30–36.

3. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.

4. Косников Ю.Н., Хоанг Тхай Хо. Сплайн-интерполяция траектории движения динамического объекта // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего $_{\text{плюс}}$. Серия: Технические науки. Информатика, вычислительная техника и управление. Пенза: Изд-во ПГТУ, 2016. №03(31). С. 195–202.

**Хоанг Тхай Хо**
Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
E-mail: hoangthaiho@gmail.com

**Hoang Thai Ho**
Penza State University,
Penza, Russia