Тархов Д.А., Бортковская М.Р., Васильев П.И., Семенова Д.А., Шишкина И.А., Удалов П.П. Изучение прогиба мембраны с помощью многослойных полуэмпирических моделей. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVII Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2017. – С. 56-61.

УДК 51-72

ИЗУЧЕНИЕ ПРОГИБА МЕМБРАНЫ С ПОМОЩЬЮ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Д.А. Тархов, М.Р. Бортковская, П.И. Васильев, Д.А. Семенова, И.А. Шишкина, П.П. Удалов

STUDY USING THE MODEL OF A LAYERED SEMI-EMPIRICAL DEFLECTION OF THE MEMBRANE

D.A. Tarkhov, M.R. Bartkowska, P.I. Vasilyev, D.A. Semenov, I.A. Shishkin, P.P. Udalov

Аннотация. Рассмотрено решение задачи о моделировании прогиба нагруженной круговой мембраны в симметрическом случае. Сравниваются модели, выражающие зависимость прогиба мембраны от расстояния до центра. Первая основана на аналитическом решении уравнений условий равновесия. Вторая получена с помощью оригинальной модификации уточнённого метода Эйлера. Коэффициенты моделей подбирались по экспериментально полученных данным. Сравнение показало, что модель, основанная на уточнённом методе Эйлера, более достоверно выражает зависимость прогиба мембраны от расстояния до центра.

Ключевые слова: полуэмпирический метод; уточнённый метод Эйлера; круговая мембрана; исследование зависимости прогиба от радиуса.

Abstract. In the case of the solution to the problem of modeling the deflection of the membrane is considered symmetric loaded circular. Sravnivayutsya, from the center to the deflection of the membrane expressing the distance dependence. The first equation is based on the real equilibrium analytical solution. Using methods originalno Euler obtained the Second modification clarified.According poluchennije experimentally were selected by the Coefficients of the model. The comparison showed that the model, updated and Euler methods are based, according to the distance from the center to the deflection of the membrane Virage more reliably.

Keywords: semiempirical methods; Euler's method updated; circular membrane; the radius of the deflection according to the study.

В данной статье сравниваются точное решение дифференциального уравнения и приближенное решение, полученное модификацией [1-4] двухшагового метода Эйлера [5], в плане их соответствия экспериментальным данным. Рассматривается круглая мембрана радиуса R=10 см, на ней располагаются поочередно грузы различной массы, мембрана предполагается невесомой, груз размещается в центре мембраны, его радиус $a << R$, предполагается, что растяжение изотропно. Если $u(r)$ – отклонение мембраны от положения равновесия, то при указанных условиях оно будет описываться уравнением

$$u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r = 0, \tag{1}$$

которое представляет собой уравнение Лапласа в полярных координатах, где $u(r,\varphi) = u(r)$, то есть искомая функция не зависит от направления, а зависит только от расстояния r точки от центра мембраны. Рассматриваемое уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Для дальнейшего сравнения с приближенным решением выпишем его точное решение:

$$u(r) = Rz_0 \ln\frac{r}{R} + u_0. \tag{2}$$

Здесь $u_0 = u(R), z_0 = u'(R)$ – начальные данные на краю мембраны. В отсутствии груза естественно считать $u_0 = 0, z_0 = 0$, решение будет нулевым. При наличии груза его масса отражается на величине z_0, и подбором этой величины можно задавать решение (2) и анализировать зависимость z_0 от массы m груза. Решение (2) рассматривается для значений $r \in [a, R]$, то есть вне области расположения груза. Приведем уравнение (1) к нормальной системе дифференциальных уравнений, после замены $x = R - r$ получим:

$$\begin{cases} u' = -z, \\ z' = \dfrac{z}{R - x}. \end{cases} \tag{3}$$

Решая систему (3) с помощью модификации [1-4] двухшагового метода Эйлера [5], находим приближенное решение:

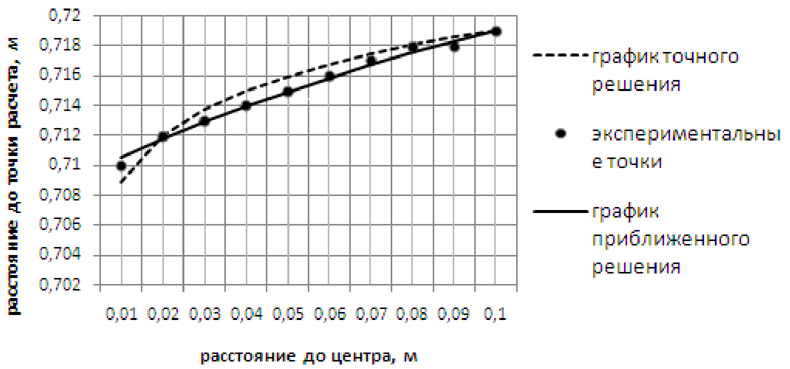
$$u(x) = u_0 - \frac{xz_0}{4}\left(4 + \frac{3x}{4R} + \frac{2x}{4R - x} + \frac{x^2}{2R(4R - x)}\right). \tag{4}$$

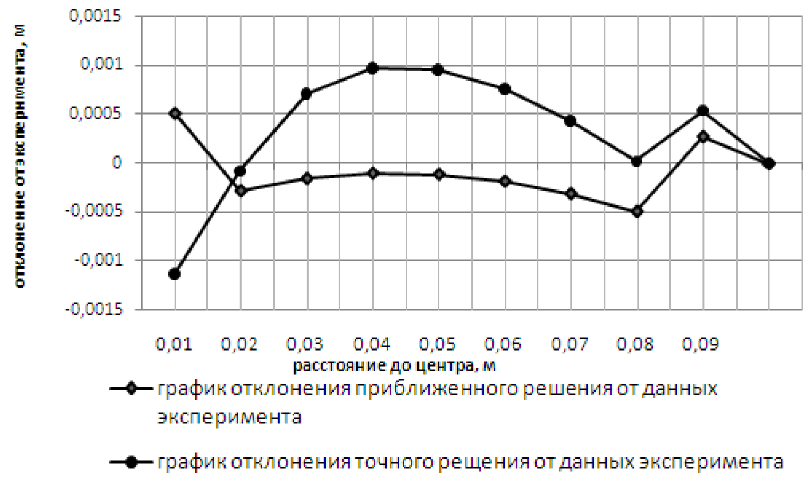
Здесь u_0, z_0 имеют тот же смысл, что в формуле (2), u_0 – начальное значение прогиба на краю мембраны, то есть при $x = 0$, а $z_0 = -u'_x|_{x=0} = u'_r|_{r=R}$. Для удобства сравнения с результатами эксперимента упростим формулу (4) и сделаем в ней обратную замену $x = R - r$:

$$u = u_0 - Rz_0 + z_0 r - \frac{z_0}{16R} \cdot \frac{20R(R - r)^2 - (R - r)^3}{3R + r}. \tag{5}$$

Поскольку при определении прогиба в условиях эксперимента измерения проводились от некоторой точки отсчета, то есть $u_0 \neq 0$, будем выбирать это начальное данное таким, как в эксперименте. Для выбора начального значения z_0 используемприближенную формулу $z_0 \approx \frac{\tilde{u}(R-h) - u_0}{-h}$, где $\tilde{u}(r)$ – экспериментальные значения прогиба, h – шаг переменной. Далее это значение уточняется по методу наименьших квадратов.

Ниже приводится график решений, полученных по формулам (2) и (5), и график, построенный по результатам измерений, значения массы груза m=100 гр., его радиус a=1,5 см. Берем исходя из эксперимента $u_0 = 0{,}719м, z_0 \approx 0{,}070$ для приближенного решения, $z_0 \approx 0{,}044$ – для точного решения.





Выводы. Приведенные измерения и вычисления показывают, что вблизи груза, расположенного в центре мембраны и имеющего радиус, малый по сравнению с радиусом мембраны, приближенное решение ближе к результатам эксперимента, чем точное. При удалении от груза и приближении к краю мембраны точное решение либо становится ближе к результатам измерений, чем приближенное, либо они практически совпадают. Этот результат представляется закономерным, поскольку точное решение имеет сингулярность при $r=0$, а реальные значения $u(r)$ конечны при всех значениях $r \in [0,R]$. Но факт, что приближенное решение ближе к результатам эксперимента, чем точное, говорит о том, что используемое дифференциальное уравнение, недостаточно точно моделирует физическую ситуацию. Для гипотезы о характере зависимости начального значения z_0 производной прогиба на краю мембраны от массы груза требуются дальнейшие эксперименты.

Библиографический список

1. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016). URL: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206

2. Vasilyev A., Tarkhov D., Bolgov I., Kaverzneva T., Kolesova S., Lazovskaya T., Lukinskiy E., Petrov A., Filkin V. Multilayer neural network models based on experimental data for processes of sample deformation and destruction // Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf

3. Tarkhov D., Shershneva E. Approximate analytical solutions of mathieu's equations based on classical numerical methods // Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf

4. Вербжицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения // М.: Высшая школа, 2001.

Тархов Дмитрий Альбертович
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия

Tarkhov D.A.
Saint-Wikinews at the University of Leningrad Peter The Great,
Saint-Petersburg, Russia

Бортковская М.Р.
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия

Bartkowska M.R.
Saint-Wikinews at the University of Leningrad Peter The Great,
Saint-Petersburg, Russia

Васильев П.И.
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия

Vasilyev P.I.
Saint-Wikinews at the University of Leningrad Peter The Great,
Saint-Petersburg, Russia

Семенова Д.А.
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия

Semenov D.A.
Saint-Wikinews at the University of Leningrad Peter The Great,
Saint-Petersburg, Russia

Шишкина И.А.
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия

Shishkina I.A.
Saint-Wikinews at the University of Leningrad Peter The Great, Saint-Petersburg, Russia

Удалов П.П.
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия

Udalov P.P.
Saint-Wikinews at the University of Leningrad Peter The Great,
Saint-Petersburg, Russia