

Тархов Д.А., Суббота А.Д., Суриков И.Ю. Применение неявного метода Эйлера к задаче стабилизации перевернутого маятника. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVII Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2017. – С. 61-65.

УДК 517.977.58

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЯВНОГО МЕТОДА ЭЙЛЕРА К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Д.А. Тархов, А.Д. Суббота, И.Ю. Суриков

THE APPLICATION OF THE IMPLICIT EULER'S METHOD TO THE STABILIZATION PROBLEM OF AN INVERTED PENDULUM

D.A. Tarkhov, A.D. Subbota, I.Y. Surikov

Аннотация. Статья посвящена тестированию метода управления динамическими системами на примере решения задачи приведения обратного маятника в окрестность состояния неустойчивого равновесия за минимальное время в условиях ограниченного управления. Подход состоит в совершении двух шагов с управлениями разных знаков. Время каждого шага подбирается оптимальным образом на основе приближённого решения, полученного неявным методом Эйлера.

Ключевые слова: обратный маятник; стабилизация; закон управления; принцип максимума Понтрягина.

Abstract. The article is devoted to testing the control method for dynamical systems by solving the problem of reducing the inverse pendulum to a neighborhood of the state of unstable equilibrium in a minimum time in conditions of limited control. The approach is to complete two steps with controls of different signs. The time of each step is selected in an optimal way on the basis of an approximate solution obtained by the implicit Euler's method.

Keywords: reverse pendulum; stabilization; control law; Pontryagin maximum principle.

Задача управления маятником в окрестности неустойчивого равновесия является простым примером стабилизации нелинейной динамической системы. На её примере имеет смысл тестировать методы поиска оптимального управления перед их применением к решению более сложных задач. Целью исследования одного нового метода является стабилизация системы при больших отклонениях, что позволяет привести исходную систему в малую окрестность верхнего положения равновесия.

Поведение маятника моделируем дифференциальным уравнением:

$$\ddot{\varphi} = a \sin \varphi + bu,$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали, u – момент прикладываемой силы, a, b – коэффициенты, зависящие от параметров объекта. Задача состоит в выборе такого управления u , чтобы $\varphi, \dot{\varphi} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Перейдём к координатам на фазовой плоскости: $x = \varphi, y = \dot{\varphi}, a = b = 1$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin x + u \end{cases} \quad (1)$$

Будем решать задачу стабилизации маятника в верхнем положении равновесия при условии $|u| \leq u_0$ за минимальное время. В соответствии с принципом максимума Понтрягина [1] управление подбирается максимизацией функции Гамильтона, что даёт $u = \pm u_0$. Точное исследование и аналитическое построение управления

затруднительно, поэтому применим приближённые методы. В дальнейшем будем считать, что $u_0 = 1$.

Подход состоит в совершении двух шагов с управлениями разных знаков. Время выполнения этих шагов подбирается таким образом, чтобы в результате система перешла в искомое положение равновесия. Для поиска длительности шагов применяем неявный метод Эйлера [2], в модификации [3-7]. Движение на первом шаге задаётся системой $\begin{cases} x_1 = x_0 + ty_1 \\ y_1 = y_0 + t(\sin x_1 + u) \end{cases}$, на втором – системой: $\begin{cases} x_2 = x_1 + \tau y_2 \\ y_2 = y_1 + \tau(\sin x_2 - u) \end{cases}$.

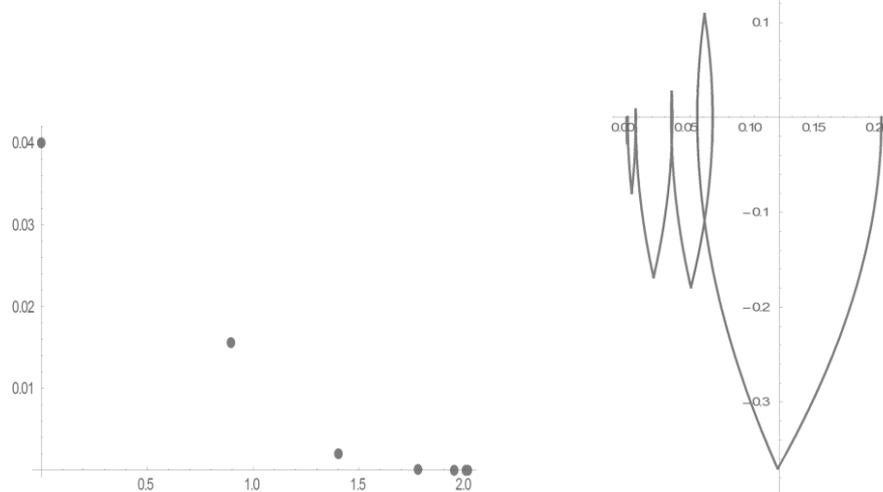
Так как мы требуем выполнения условий $\{x_2 = y_2 = 0\}$. Подстановка этих условий в (5)

даёт $\begin{cases} x_0 + t\tau u = 0 \\ y_0 = (\tau - t)u \end{cases}$, т.е. при $x_0 \neq 0$ получаем $u = -\text{sign}(x_0)$. При этом t и τ находятся из

уравнений: $\begin{cases} x_0 u + ty_0 u + t^2 = 0 \\ \tau = y_0 u + t. \end{cases}$ Получаем: $\begin{cases} t = 0.5(\sqrt{y_0^2 + 4|x_0|} - y_0 u) \\ \tau = 0.5(\sqrt{y_0^2 + 4|x_0|} + y_0 u). \end{cases}$

Далее совершается переход в соответствии с решением (1) на интервале длины $t + \tau$, и выбор управления повторяется.

Приведем результаты вычислений для $x_0 = 0.2, y_0 = 0$



Графики квадрата расстояния до верхнего положения равновесия и траектория на фазовой плоскости, полученные из (1) с помощью управления, при совершении пары шагов оптимальной длины

Аналогичные результаты получаются и при большинстве других начальных точек, в том числе далеких от состояния равновесия.

Проведённые вычислительные эксперименты показали, что предложенные модификации классических численных методов могут успешно применяться к задачам управления, в том числе к задачам, связанным с управлением в условиях неустойчивости. Данные подходы могут оказаться особенно полезными в ситуации, когда математическая модель управляемого объекта неточна и может уточняться в процессе управления им по мере накопления данных о процессах в моделируемой системе.

Библиографический список

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

2. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 2001

3. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016). URL: <http://iop-science.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206>

4. Vasilyev A., Tarkhov D., Bolgov I., Kaverzneva T., Kolesova S., Lazovskaya T., Lukinskiy E., Petrov A., Filkin V. Multilayer neural network models based on experimental data for processes of sample deformation and destruction// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016. P.6-14. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf>

5. Vasilyev A., Tarkhov D., Shemyakina T. APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.393-400. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf>

6. Tarkhov D., Shershneva E. Approximate analytical solutions of mathieu's equations based on classical numerical methods // Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf>

Тархов Дмитрий Альбертович

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dtarkhov@gmail.com

Суббота Анастасия Дмитриевна

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Subbota.AD@yandex.ru

Суриков Илья Юрьевич

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ilya_curi@mail.ru

Tarkhov D.A.

Peter the Great St.Petersburg
Polytechnic University,
Saint-Petersburg, Russia

Subbota A.D.

Peter the Great St.Petersburg
Polytechnic University,
Saint-Petersburg, Russia

Surikov I.Y.

Peter the Great St.Petersburg
Polytechnic University,
Saint-Petersburg, Russia