Яремко О.Э., Хоцян Д.А. Метод радиально базисных функций в задаче Дирихле для уравнения Лапласа и его реализация в MATLAB. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVII Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2017. – С. 65-69.

УДК 519.632.4

МЕТОД РАДИАЛЬНО БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В MATLAB

О.Э. Яремко, Д.А. Хоцян

RADIAL BASIS FUNCTIONS METHOD FOR LAPLACE EQUATION DIRICHLET PROBLEM AND ITS IMPLEMENTATION IN MATLAB

O.E. Yaremko, D.A. Khotsyan

Аннотация. Рассматривается метод радиально базисных функций для решения краевой задачи Дирихле. В качестве последних выбирались функции Грина для задачи Дирихле в полуплоскости. Метод реализован в приложении CurveFittingToolbox из MATLAB.

Ключевые слова: радиально базисные функции, задача Дирихле, обратная квадрика, аппроксимация.

Abstract. Describes a radial basis functions method for solving boundary-value Dirichlet problem. Green's function for the Dirichlet problem in the half plane was chosen as radial basis functions. The method is implemented in the application Curve Fitting Toolbox of MATLAB

Keywords: radial basis functions, Dirichlet problem, inverse quadric, approximation.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области D, расположенной в полуплоскости $x>0$,

$$u''_{yy}+u''_{xx}=0,(x,y)\in D,$$
$$u(x,y)=f(x,y),(x,y)\in\partial D,$$

где ∂D – граница D, а $f(x,y)$ – граничное значение функции $u(x,y)$. Существует множество методов, как аналитических, так и численных, решения задачи Дирихле [2]. Будем искать решение задачи Дирихле в виде взвешенной суммы функций Грина для задачи Дирихле для полуплоскости,

$$u(x,y)\approx\sum_{j=1}^{n}w_j\frac{x+b_j}{\left(x+b_j\right)^2+\left(y-c_j\right)^2}.$$

В работе [3] доказана возможность подобной аппроксимации с любой точностью. Слагаемые в правой части можно интерпретировать как радиально базисные функции (rbf) [1], в которых параметры имеют следующий смысл: w_j – веса, α_j – центры, $\sigma_j>0$ – ширина окна rbf [1]. Вместе с тем слагаемые в правой части являются решениями уравнения Лапласа по построению. Осталось удовлетворить краевое условие Дирихле. Пусть граница области допускает параметризацию $\partial D=\{(x,y):x=x(t),y=y(t),t\in[a,b]\}$, тогда имеем задачу аппроксимации функции $f(x(t),y(t))$ с помощью линейной комбинации сужений обратных квадрик на границу ∂D,

$$f(x(t),y(t))\approx\sum_{j=1}^{n}w_j\frac{x(t)+b_j}{\left(x(t)+b_j\right)^2+\left(y(t)-c_j\right)^2}.$$

Настройка весовых векторных коэффициентов, центра и ширины окна каждой из обратных квадрик осуществляется методом наименьших квадратов. Могут быть использованы методы отжига, градиентный, генетический алгоритм, метод сопряженных градиентов, EM метод, RBFNN.

Воспользуемся приложением **CurveFittingToolbox** из **Matlab.**

Задача Дирихле для эллипса с границей $y = 0.5\sin t, x = 2 + \cos t$. Выбирались краевые значения функции $f(x, y) = arctg\frac{y+1}{x+1} - arctg\frac{y-1}{x+1}$, на которые накладывался шум, т.е. значения функции задавались с ошибкой ± 0.05, t = (0:0.1:2*pi)';

gdata = atan((1+0.5*sin(t))./(3+cos(t))) + atan((1-0.5*sin(t))/(3+cos(t))) + 0.1*(rand(size(t))-.5);

Аппроксимация выполнялась с помощью одной квадрики

$$\frac{x+b}{(x+b)^2 + (y-c)^2},$$

суженной на границу эллипса.

f = fittype('a*(2+b+cos(t))./((2+b+cos(t)).^2+(0.5*sin(t)-c).^2)^(-1)');

Результат аппроксимации

gfit = fit(,gdata,f,'StartPoint',[1 1 1])

General model:

gfit(x) = a*(2+b+cos(t))./((2+b+cos(t)).^2+(0.5*sin(t)-c).^2)^(-1)

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = -0.0008748 (-0.001044, -0.0007058)

b = -11.06 (-11.67, -10.45)

c = -0.4569 (-2.163, 1.25)

a=gfit.a

a = -8.7477e-004

b=gfit.b

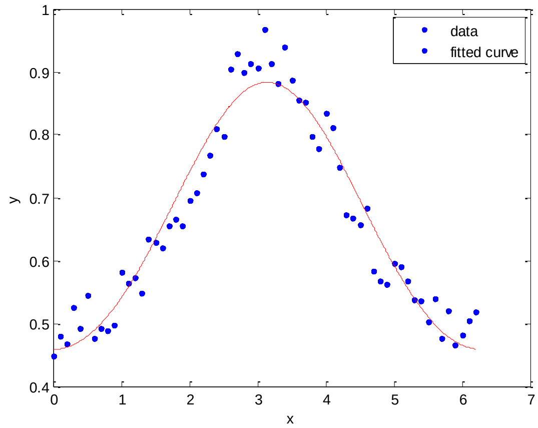
b = -11.0613

c=gfit.c

c =   -0.4569

График краевого условия и его аппроксимации

plot(gfit,t,gdata)



[t,r]=meshgrid(0:0.1:2*pi,0:0.1:1);

Теоретическое решение

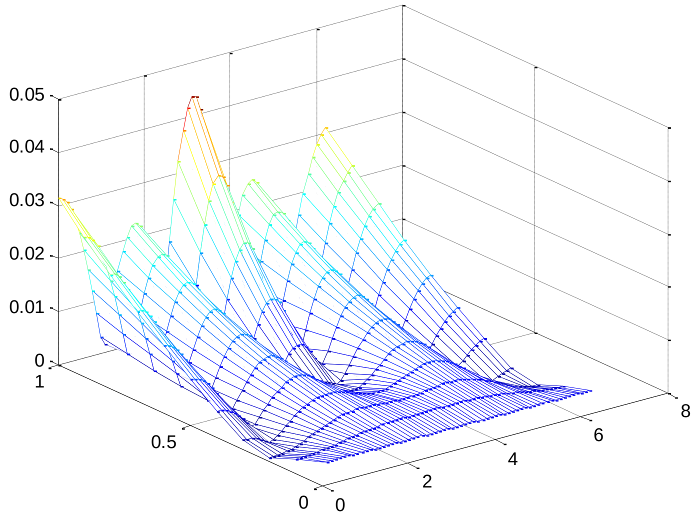
uteor=atan((1+0.5*r.*sin(t))./(3+r.*cos(t)))+atan((1-0.5*r.*sin(t))./(3+r.*cos(t)));

Аппроксимация обратной квадрикой

```
uapr=a*(2+b+r.*cos(t))./((2+b+r.*cos(t)).^2+(0.5*r.*sin(t)-c).^2).^(-1);
mesh(x,y,uteor);
mesh(x,y,uapr);
```

График абсолютной величины погрешности

```
mesh(x,y,abs(uteor-uapr));
```



Библиографический список

1. Горбаченко В.И., Жуков М.В. Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017, том 57. № 1. С. 133–143.

2. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.

3. Горбань А.Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // Сибирский журнал вычислительной математики. 1998, т. 1, № 1. С. 12–24.

Яремко Олег Эмануилович
Пензенский государственный
университет, г. Пенза, Россия
E-mail: yaremki@mail.ru

Yaremko O.E.
Penza State University,
Penza,Russia

Хоцян Дина Андреевна
Пензенский государственный
университет, г. Пенза, Россия
E-mail:dina_dina_100994@mail.ru

Khotsyan D.A.
Penza State University,
Penza,Russia