Бутаев М.М. Характеристики распределений суммы нескольких треугольно распределенных значений времен обработки запроса инфокоммуникационной системой. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XIX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2019. – С. 009-016.

УДК 004.9:519.2

ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММЫ НЕСКОЛЬКИХ ТРЕУГОЛЬНО РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВРЕМЕН ОБРАБОТКИ ЗАПРОСА ИНФОКОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ

М.М. Бутаев

CHARACTERISTICS OF THE DISTRIBUTION OF THE SUM OF SEVERAL TRIANGULARY DISTRIBUTED VALUES OF THE REQUEST PROCESSING TIMES BY THE INFOCOMMUNICATION SYSTEM

M.M. Butaev

Аннотация. Цель работы – совершенствование методов расчёта вероятностных характеристик информационных систем. Объектом исследования является аналитический метод расчёта времени обработки запроса в системе, предметом – формулы расчёта продолжительности последовательной обработки запроса элементами системы с равномерно распределёнными случайными временами обработки. При выводе формул расчёта вероятностных характеристик суммы независимых треугольно распределённых случайных величин применены методы теории вероятности. Приведены формулы основных характеристик для сумм двух и трёх независимых треугольно распределённых случайных величин.

Ключевые слова: плотность вероятности, функция распределения, вероятностные характеристики инфокоммуникационных систем.

Abstract. The purpose of the work is to improve methods for calculating the probabilistic characteristics of information systems. The object of study is an analytical method for calculating the request processing time in the system, the subject is the formula for calculating the duration of sequential processing of a request by system elements with evenly distributed random processing times. When deriving formulas for calculating the probability characteristics of the sum of independent triangularly distributed random variables, methods of probability theory are applied. The formulas of the main characteristics for the sums of two and three independent triangularly distributed random variables are given.

Keywords: probability density function, cumulative distribution function, probabilistic characteristics of infocommunication systems.

Одним из основных критериев, определяющих эффективность использования автоматизированной системы управления, было и остаётся ***сокращение цикла управления или оперативность*** управления, при условии, что непрерывность, устойчивость, скрытность обеспечивают достаточные условия для оперативности. Часто для оценки временных параметров процесса управления и отдельных его этапов используется математический аппарат случайных процессов, поскольку продолжительности операций по обработке запросов описываются случайными значениями времени. В наиболее простом случае при совокупности упрощающих допущений используется теория массового обслуживания. При малой величине отношения интенсивности входных запросов к производительности обрабатывающего узла характеристики системы массового обслуживания определяются временем пребывания запросов в обрабатывающем узле. При большом значении отношения интенсивности входных запросов к производительности обрабатывающего узла характеристики системы массового обслуживания определяются временем пребывания запросов в очереди [1].

Оценка влияния времён пребывания запросов в компонентах обрабатывающего узла на полное время обслуживания выполняется путём расчёта свёртки и смеси случайных величин, которые моделируют обработку запросов в последовательно и параллельно выполняемых этапах обработки запросов, имеющих случайные продолжительности. Продолжительность обработки запросов в последовательности этапов сводится к суммированию продолжительностей обработки в каждом из этапов, т.е. к суммированию независимых случайных величин [2, 3]. При высоких ограничениях на продолжительности обработки запросов выполнение обработки смещается в сторону больших значений задаваемого интервала обработки, иными словами, распределение вероятности времени исполнения запроса смещается в сторону верхней границы. В простейшем случае смещённое распределение на ограниченном интервале (бета-распределение) имеет треугольное распределение:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, b_1 < t < 0; \\ \dfrac{2t}{b_1^2} H(b_1 - t), 0 < t < b_1; \end{cases}$$

$$F_1(t) = \begin{cases} 0, t \le 0; \\ \dfrac{1}{b_1^2}\left[t^2 - \left(t^2 - b_1^2\right) H(t - b_1)\right], 0 < t < b_1; \\ 1, b_1 \le t; \end{cases}$$

где $H(t)$ – обобщённая функция Хевисайда [4]. Случайные величины $T \in t_i, i \in 1, \ldots, n$ независимы и распределены на интервалах $t_i \in [0; \beta_i]$, $\beta_i > 0$. Для упрощения дальнейших аналитических преобразований случайные величины упорядочены по возрастанию β_i. Верхние границы упорядоченных случайных величин обозначены переменными b_i. Условие упорядочения: $b_i \le b_{i+1}$, $i \in 1, \ldots, n - 1$.

Характеристическая функция треугольно распределённой случайной величины:

$$\chi_t(p) = \frac{2\left[1 - (1 + b_1 p) e^{-b_1 p}\right]}{b_1^2 p^2}.$$

Математическое ожидание треугольно распределённой случайной величины $M(T)=\frac{2b_1}{3}$, медиана $Me(T)=\frac{b_1}{\sqrt{2}}$, мода $Mo(T)=b_1$. Дисперсия треугольно распределённой случайной величины $D(T)=\frac{b_1^2}{18}$.

Квантиль порядка 0,2 $=\frac{b_1}{\sqrt{5}}$, квантиль порядка 0,8 $=\frac{2b_1}{\sqrt{5}}$.

Начальные моменты 2, 3, 4 порядков: $m_2(T)=\frac{b_1^2}{18}$, $m_3(T)=\frac{2b_1^3}{5}$, $m_4(T)=\frac{b_1^4}{3}$.

Коэффициенты асимметрии $Sk(T)=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$ и эксцесса $Ex(T)=\frac{12}{5}$.

Для суммы двух независимых треугольно распределённых случайных величин функции плотности $f_{12}(x)$ и распределения $F_{12}(x)$ имеют следующий вид:

$$f_{12}(t)=\begin{cases}0, b_1+b_2\le t\le 0;\\ \frac{2}{b_1^2b_2^2}\left\{t^3-H(t-b_1)(t-b_1)^2(t+2b_1)-H(t-b_2)(t-b_2)^2(t+2b_2)+\right.\\ \left.+H(t-b_1-b_2)(t-b_1-b_2)\left[(t-b_1-b_2)^2+3(b_1+b_2)(t-b_1-b_2)+6b_1b_2\right]\right\}, 0<t<b_1+b_2;\end{cases}$$

$$F_{12}(t)=\begin{cases}0, t\le 0;\\ \frac{1}{6b_1^2b_2^2}\left\{t^4-H(t-b_1)(t-b_1)^3(t+3b_1)-H(t-b_2)(t-b_2)^3(t+3b_2)+\right.\\ \left.+H(t-b_1-b_2)(t-b_1-b_2)^2\left[t^2+2(b_1+b_2)t-3(b_1-b_2)^2\right]\right\}, 0<t<b_1+b_2;\\ 1, b_1+b_2\le t.\end{cases}$$

Характеристическая функция суммы двух независимых треугольно распределённых случайных величин:

$$\chi_t(p)=\frac{4\left[1-(1+b_1p)e^{-b_1p}\right]\left[1-(1+b_2p)e^{-b_2p}\right]}{b_1^2b_2^2p^4}.$$

Математическое ожидание суммы двух независимых треугольно распределённых случайных величин $M(T)=\frac{2(b_1+b_2)}{3}$, медиана равна квантили порядка 0,5 и вычисляется численно при решении уравнения $t^4-(t-b_1)^3(t+3b_1)-(t-b_2)^3(t+3b_2)=3b_1^2b_2^2$, мода $Mo(T)=\max\limits_{0<t<b_1+b_2} f_{12}(t)$. Дисперсия суммы двух независимых треугольно распределённых случайных величин $D(T)=\frac{b_1^2+b_2^2}{18}$.

Квантиль порядка 0,2 вычисляется численным решением уравнения $t^4-(t-b_1)^3(t+3b_1)=\frac{6}{5}b_1^2b_2^2$, квантиль порядка 0,8 вычисляется численным решением уравнения $t^4-(t-b_1)^3(t+3b_1)-(t-b_2)^3(t+3b_2)=\frac{24}{5}b_1^2b_2^2$.

Начальные моменты 2, 3, 4 порядков: $m_2(T)=\frac{b_1^2}{2}+\frac{8b_1b_2}{9}+\frac{b_2^2}{18}$, $m_3(T)=\frac{2b_1^3}{5}+b_1^2b_2+b_1b_2^2+\frac{2b_2^3}{5}$, $m_4(T)=\frac{b_1^4+b_2^4}{3}+\frac{16}{15}b_1b_2\left(b_1^2+b_2^2\right)+\frac{3}{2}b_1^2b_2^2$.

Коэффициенты асимметрии $Sk(T)=-\frac{2\sqrt{2}\left(b_1^3+b_2^3\right)}{5\sqrt{\left(b_1^2+b_2^2\right)^3}}$ и эксцесса $Ex(T)=\frac{6\left(2b_1^4+5b_1^2b_2^2+2b_2^4\right)}{5\left(b_1^2+b_2^2\right)^2}$.

Для суммы трёх независимых треугольно распределённых случайных величин функции плотности $f_{123}(x)$ и распределения $F_{123}(x)$ имеют следующий вид:

$$f_{123}(t)=\begin{cases}0, b_1+b_2+b_3\le t\le 0;\\ \frac{1}{120b_1^2b_2^2b_3^2}\left\{t^5-H(t-b_1)(t-b_1)^4(t+4b_1)-H(t-b_2)(t-b_2)^4(t+4b_2)-\right.\\ -H(t-b_3)(t-b_3)^4(t+4b_3)+\\ +H(t-b_1-b_2)(t-b_1-b_2)^3\left[(t-b_1-b_2)^2+5(b_1+b_2)(t-b_1-b_2)+20b_1b_2\right]+\\ +H(t-b_1-b_3)(t-b_1-b_3)^3\left[(t-b_1-b_3)^2+5(b_1+b_3)(t-b_1-b_3)+20b_1b_3\right]+\\ +H(t-b_2-b_3)(t-b_2-b_3)^3\left[(t-b_2-b_3)^2+5(b_2+b_3)(t-b_2-b_3)+20b_2b_3\right]-\\ -H(t-b_1-b_2-b_3)(t-b_1-b_2-b_3)^2\left[(t-b_1-b_2-b_3)^3+5(b_1+b_2+b_3)\times\right.\\ \left.\left.\times(t-b_1-b_2-b_3)^2+20(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)(t-b_1-b_2-b_3)+60b_1b_2b_3\right]\right\}, 0<t<b_1+b_2+b_3;\end{cases}$$

$$F_{123}(t)=\begin{cases}\frac{1}{90b_1^2b_2^2b_3^2}\left\{t^6-H(t-b_1)(t-b_1)^5(t+5b_1)-H(t-b_2)(t-b_2)^5(t+5b_2)-\right.\\ -H(t-b_3)(t-b_3)^5(t+5b_3)+\\ +H(t-b_1-b_2)(t-b_1-b_2)^4\left[(t-b_1-b_2)^2+6(b_1+b_2)(t-b_1-b_2)+30b_1b_2\right]+\\ +H(t-b_1-b_3)(t-b_1-b_3)^4\left[(t-b_1-b_3)^2+6(b_1+b_3)(t-b_1-b_3)+30b_1b_3\right]+\\ +H(t-b_2-b_3)(t-b_2-b_3)^4\left[(t-b_2-b_3)^2+6(b_2+b_3)(t-b_2-b_3)+30b_2b_3\right]-\\ -H(t-b_1-b_2-b_3)(t-b_1-b_2-b_3)^3\left[(t-b_1-b_2-b_3)^3+6(b_1+b_2+b_3)\times\right.\\ \left.\left.\times(t-b_1-b_2-b_3)^2+30(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)(t-b_1-b_2-b_3)+120b_1b_2b_3\right]\right\}, 0<t<b_1+b_2+b_3;\\ 1, b_1+b_2+b_3\le t.\\ 0, t\le 0\end{cases}$$

Характеристическая функция суммы трёх независимых треугольно распределённых случайных величин:

$$\chi_t(p)=\frac{8\left[1-(1+b_1p)e^{-b_1p}\right]\left[1-(1+b_2p)e^{-b_2p}\right]\left[1-(1+b_3p)e^{-b_3p}\right]}{b_1^2b_2^2b_3^2p^6}.$$

Математическое ожидание суммы трёх независимых треугольно распределённых случайных величин $M(T)=\dfrac{2(b_1+b_2+b_3)}{3}$, медиана равна квантили порядка 0,5 и вычисляется численным решением уравнения:

$$\begin{aligned}&t^6-(t-b_1)^5(t+5b_1)-(t-b_2)^5(t+5b_2)-(t-b_3)^5(t+5b_3)+\\&+(t-b_1-b_2)^4\left[(t-b_1-b_2)^2+6(b_1+b_2)(t-b_1-b_2)+30b_1b_2\right]+\\&+(t-b_1-b_3)^4\left[(t-b_1-b_3)^2+6(b_1+b_3)(t-b_1-b_3)+30b_1b_3\right]=45b_1^2b_2^2b_3^2,\end{aligned}$$

мода $Mo(T)=\max\limits_{0<t<b_1+b_2+b_3} f_{123}(t)$. Дисперсия суммы трёх независимых треугольно распределённых случайных величин $D(T)=\dfrac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{18}$.

Квантиль порядка 0,2 вычисляется численным решением уравнения $t^6-(t-b_1)^5(t+5b_1)-(t-b_2)^5(t+5b_2)-(t-b_3)^5(t+5b_3)=18b_1^2b_2^2b_3^2$, квантиль порядка 0,8 вычисляется численным решением уравнения

$$\begin{aligned}&t^6-(t-b_1)^5(t+5b_1)-(t-b_2)^5(t+5b_2)-(t-b_3)^5(t+5b_3)+\\&+(t-b_1-b_2)^4\left[(t-b_1-b_2)^2+6(b_1+b_2)(t-b_1-b_2)+30b_1b_2\right]+\\&+(t-b_1-b_3)^4\left[(t-b_1-b_3)^2+6(b_1+b_3)(t-b_1-b_3)+30b_1b_3\right]+\\&+(t-b_2-b_3)^4\left[(t-b_2-b_3)^2+6(b_2+b_3)(t-b_2-b_3)+30b_2b_3\right]=72b_1^2b_2^2b_3^2.\end{aligned}$$

Начальные моменты 2, 3, 4 порядков:

$$m_2(T)=\frac{b_1^2+b_2^2+b_1^2}{2}+\frac{8(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)}{9},$$

$$m_3(T)=\frac{2(b_1^3+b_2^3+b_3^3)}{5}+b_1b_2(b_1+b_2)+b_1b_3(b_1+b_3)+b_2b_3(b_2+b_3)+\frac{16b_1b_2b_3}{9},$$

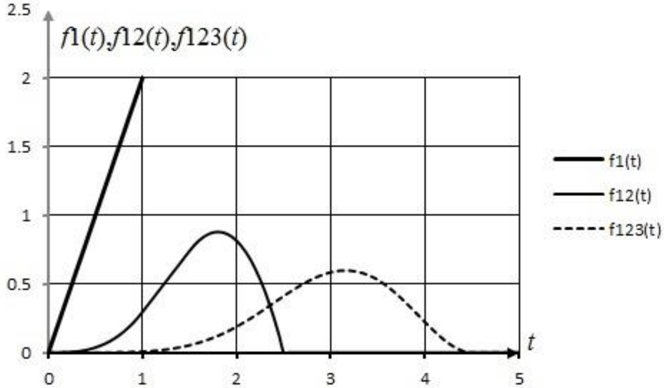
$$\begin{aligned}m_4(T)=&\frac{b_1^4+b_2^4+b_3^4}{3}+\frac{16}{15}\left[b_1b_2(b_1^2+b_2^2)+b_1b_3(b_1^2+b_3^2)+b_2b_3(b_2^2+b_3^2)\right]+\\&+\frac{3}{2}\left(b_1^2b_2^2+b_1^2b_3^2+b_2^2b_3^2\right)+\frac{8}{2}\left(b_1b_2b_3^2+b_1b_2^2b_3+b_1^2b_2b_3\right).\end{aligned}$$

Коэффициенты асимметрии $Sk(T)=-\dfrac{2\sqrt{2}(b_1^3+b_2^3+b_3^3)}{5\sqrt{(b_1^2+b_2^2+b_3^3)^3}}$ и эксцесса

$$Ex(T)=\frac{6\left[2(b_1^4+b_2^4+b_3^4)+5(b_1^2b_2^2+b_1^2b_3^2+b_2^2b_3^2)\right]}{5(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^2}.$$

Несложно вывести формулы для сумм большего числа случайных переменных, однако существенно возрастает их громоздкость. Реализация предложенных формул расчёта в программах ЭВМ затруднений не вызывает.

Графики $f_1(t)$, $f_{12}(t)$, $f_{123}(t)$ для (b_1=1, b_2 = 1,5, b_3 = 2) приведены на рисунке.



Графики функций плотности вероятности
$f_1(t)$, $f_{12}(t)$ и $f_{123}(t)$ при b_1=1, b_2=1,5, b_3=2

Полученные аналитические выражения, реализованные в виде программ ЭВМ, позволяют использовать более сложные функции распределения случайных величин, обеспечивающие более высокую адекватность моделирования процессов функционирования инфокоммуникационных систем.

Библиографический список

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.

2. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.

3. Бутаев М.М., Тарасов А.А. Аналитическая оценка времени обработки запроса информационной системой // Вопросы радиоэлектроники. 2018. № 12. С. 69-73.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 831 с.

Бутаев Михаил Матвеевич
АО «НПП «Рубин»,
г. Пенза, Россия
E-mail: nts@npp-rubin.ru

Butaev M.M.
JSC «SIE «Rubin»,
Penza, Russia