Яремко О.Э., Яремко Н.Н. Обобщения рядов и интегралов Фурье. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XIX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2019. – С. 045-050.

УДК 517.444

ОБОБЩЕНИЯ РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

О.Э. Яремко, Н.Н. Яремко

FOURIER SERIES AND INTEGRALS GENERALIZATION

O.E. Yaremko, N.N. Yaremko

Аннотация. Объединяя подход Фурье и Хартли, мы представляем конструкцию рядов и интегральных преобразований по тригонометрической системе функций. Найдены формулы для коэффициентов рядов типа Фурье-Хартли. Доказаны формулы обращения интегрального преобразования типа Фурье-Хартли и его дискретного аналога.

Ключевые слова: ряды Фурье-Хартли, интегральное преобразование Фурье-Хартли, дискретное преобразование Фурье-Хартли.

Abstract. Combining the Fourier and Hartley approaches, we present the construction of series and integral transforms over a trigonometric system of functions. Formulas for coefficients of Fourier-Hartley type seriesare found.The inversion formulas of the integral Fourier-Hartley type transform and its discrete analogue are proved.

Keywords: fourier-Hartley series, integral Fourier-Hartley transform, discrete Fourier-Hartley transform.

В сложившейся практике приложения интегральных преобразований принято отдельно рассматривать преобразования Фурье и Хартли [2,4], отмечая преимущества и недостатки одного перед другим. При этом остается неизученным вопрос о едином источнике обоих преобразований. Формулы, полученные в статье, содержат в качестве частных случаев формулы Фурье и Хартли.

1. **Ряды типа Фурье-Хартли.** Любая функция $f \in L^2([-\pi,\pi],C)$ может быть разложена по системе функций $\varphi_k(x) = e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx), k \in Z$ в ряд Фурье [2]:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikx},$$

где ряд в правой части сходится к $f(x)$ по норме в $L^2([-\pi,\pi],C)$, а коэффициенты находятся по формулам Фурье

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Представим обобщение интегрального преобразования Фурье, в котором разложение ведется по системе функций $\varphi_k(x) = -be^{ikx} + ae^{-ikx}$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \left(-be^{ikx} + ae^{-ikx}\right)\cdot$$

Докажем формулу для коэффициентов

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi\left(a^2-b^2\right)}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\left(ae^{ik\xi}+be^{-ik\xi}\right)d\xi, a,b\in C, a^2-b^2\neq 0\cdot$$

На основании формулы разложения дельта-функции в ряд Фурье [1]

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx}$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi\left(a^2-b^2\right)}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(-be^{ikx}+ae^{-ikx}\right)\left(ae^{ik\xi}+be^{-ik\xi}\right)d\xi =$$

$$=\frac{1}{\left(a^2-b^2\right)}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-ab\delta(x+\xi)-b^2\delta(x-\xi)+a^2\delta(x-\xi)+ab\delta(x+\xi)\right)f(\xi)d\xi =$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x-\xi)\,f(\xi)d\xi = f(x)\cdot$$

Следствие. При $b=-1, a=1$ получаем ряд Фурье. При $b=-\exp(-i\varphi), a=\exp(i\varphi)$ получаем неизвестное ранее обобщение разложения по функциям Хартли [4]

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}_k\cos(kx-\varphi),$$

$$\hat{f}_k = \frac{2}{\pi\sin 2\varphi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx+\varphi)\,dx\cdot$$

В случае $\varphi=\frac{\pi}{4}$ выполняется равенство $\cos\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(kx+\frac{\pi}{4}\right)$, поэтому интегральное преобразование задает самосопряженный оператор.

2. **Интегральные преобразования типа Фурье-Хартли.** Любая функция $f\in L^2((-\infty,\infty),C)$ может быть разложена по системе функций

$$\varphi(x,\lambda)=e^{i\lambda x}=\cos(\lambda x)+i\sin(\lambda x), \lambda\in R$$

с помощью интеграла Фурье:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\hat{f}(\lambda)d\lambda,$$

причем интеграл в правой части сходится к $f(x)$ по норме в $f\in L^2((-\infty,\infty),C)$, и справедлива формула обращения

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx\cdot$$

Представим обобщение преобразования Фурье:
обратное

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\left(-be^{i\lambda x}+ae^{-i\lambda x}\right)d\lambda,$$

прямое

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{2\pi\left(a^2-b^2\right)}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\left(ae^{i\lambda\xi}+be^{-i\lambda\xi}\right)d\xi, a,b\in C, a^2-b^2\neq 0.$$

В самом деле, из разложения дельта-функции [1]

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}d\lambda$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi\left(a^2-b^2\right)}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\left(-be^{i\lambda x}+ae^{-i\lambda x}\right)\left(ae^{i\lambda\xi}+be^{-i\lambda\xi}\right)d\lambda d\xi=$$

$$=\frac{1}{\left(a^2-b^2\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-ab\delta(x+\xi)-b^2\delta(x-\xi)+a^2\delta(x-\xi)+ab\delta(x+\xi)\right)f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)f(\xi)d\xi=f(x)\cdot$$

Следствие. При $b=-1, a=1$ получаем интегральное преобразование Фурье. При $b=-\exp(-i\varphi), a=\exp(i\varphi)$ получаем новое обобщение интегрального представления Хартли [4]

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\cos(\lambda x-\varphi)d\lambda,$$

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{2}{\pi\sin 2\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(\lambda x+\varphi)dx.$$

В случае $\varphi=\frac{\pi}{4}$ выполнено $\cos\left(\lambda x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\lambda x+\frac{\pi}{4}\right)$, поэтому получаем формулы интегрального преобразования Хартли.

3. **Дискретное преобразование типа Фурье-Хартли.** Дискретное преобразование Фурье определяется формулами:
прямое преобразование

$$X_k=\sum_{n=0}^{N-1}x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn},$$

обратное преобразование:

$$x_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn}.$$

Здесь приняты обозначения: N – количество значений сигнала, измеренных за период, а также количество компонент разложения; x_n, $n = 0, \ldots N-1$ – измеренные значения сигнала (в дискретных временных точках с номерами $n = 0, \ldots, N-1$), которые являются входными данными для прямого преобразования и выходными для обратного; $X_k, \quad k = 0, \ldots, N-1$.

Распространим приведенные формулы на случай дискретного преобразования типа Фурье-Хартли. Рассмотрим периодический сигнал $x(t)$ с периодом равным T. Разложим его в ряд Фурье-Хартли

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(-be^{i\omega_k t} + ae^{-i\omega_k t}\right), \qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}.$$

Проведем дискретизацию сигнала так, чтобы на периоде было N отсчетов. Дискретный сигнал представим в виде отсчетов: $x_n = x(t_n)$, где $t_n = \frac{n}{N}T$, тогда эти отсчеты через ряд Фурье запишутся следующим образом:

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(-be^{i\omega_k t_n} + ae^{-i\omega_k t_n}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(-be^{\frac{2\pi i}{N}kn} + ae^{-\frac{2\pi i}{N}kn}\right).$$

Используя соотношение $e^{\pm\frac{2\pi i}{N}(k+mN)n} = e^{\pm\frac{2\pi i}{N}kn}$, получаем:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \left(-be^{\frac{2\pi i}{N}kn} + ae^{-\frac{2\pi i}{N}kn}\right), \qquad X_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{k+lN}.$$

Таким образом, мы пришли к дискретному преобразованию Фурье-Хартли. Для обращения преобразования умножим скалярно x_n на выражение $ae^{\frac{2\pi i}{N}mn} + be^{-\frac{2\pi i}{N}mn}$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \left(ae^{\frac{2\pi i}{N}mn} + be^{-\frac{2\pi i}{N}mn}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{n=0}^{N-1} \left(-be^{\frac{2\pi i}{N}kn} + ae^{-\frac{2\pi i}{N}kn}\right)\left(ae^{\frac{2\pi i}{N}mn} + be^{-\frac{2\pi i}{N}mn}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X_k \left(-ab\frac{1-e^{2\pi i(k+m)}}{1-e^{\frac{2\pi i(k+m)}{N}}} - b^2\frac{1-e^{2\pi i(k-m)}}{1-e^{\frac{2\pi i(k-m)}{N}}} + a^2\frac{1-e^{-2\pi i(k-m)}}{1-e^{-\frac{2\pi i(k-m)}{N}}} + ab\frac{1-e^{2\pi i(k+m)}}{1-e^{\frac{2\pi i(k+m)}{N}}}\right) =$$

$$= \left(a^2 - b^2\right)\sum_{k=0}^{N-1} X_k N\delta_{km}.$$

Здесь использовано выражение для суммы конечного числа членов геометрической прогрессии. Отсюда следует формула обращения дискретного преобразования Фурье-Хартли

$$X_k = \frac{1}{N\left(a^2 - b^2\right)} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left(a e^{\frac{2\pi i}{N}kn} + b e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \right).$$

Замечание. При $b = -\exp(-i\varphi), a = \exp(i\varphi)$ получаем неизвестное ранее обобщение дискретного преобразования Хартли [5]

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cos\left(\frac{2\pi i}{N} kn - \varphi \right),$$

$$X_k = \frac{2}{N \sin 2\varphi} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi i}{N} kn - \varphi \right).$$

При $\varphi = \frac{\pi}{4}$ получаем преобразование Хартли.

Библиографический список

1. Бом Д. Квантовая теория. М.: Наука, 1965. С. 729.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1.
3. Павлейно М.А., Ромаданов В.М. Спектральные преобразования в MatLab. СПб., 2007. С. 160.
4. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. М.: Мир, 1990.
5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2006. С. 751.

Яремко Олег Эмануилович
Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
E-mail: yaremki@mail.ru

Yaremko O.E.
Penza State University, Penza, Russia

Яремко Наталия Николаевна
Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
E-mail: yaremki@mail.ru

Yaremko N.N.
Penza State University, Penza, Russia