Косников Ю.Н., Новиков А.В. Математическое описание пространственных форм сплайнами Безье в задачах визуализации. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XIX Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2019. – С. 090-097.

УДК 004.92

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ СПЛАЙНАМИ БЕЗЬЕ В ЗАДАЧАХ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Ю.Н. Косников, А.В. Новиков

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF SPATIAL FORMS BY BEZIER SPLINES IN VISUALIZATION PROBLEMS

Yu.N. Kosnikov, A.V. Novikov

Аннотация. Описан способ получения интерполяционных выражений для математического описания геометрических форм (линий, поверхностей), заданных множеством характерных (опорных) точек. Предлагается использовать кривые (поверхности) Безье, проходящие через дополнительные опорные точки. Способ позволяет обоснованно задавать кривизну отсеков и редуцировать число опорных точек.

Ключевые слова: визуализация, кривая, поверхность, сплайн Безье, интерполяция, опорная точка, касательная, кривизна.

Abstract. A method for obtaining interpolation expressions for the mathematical description of geometric forms (lines, surfaces) given by a set of characteristics (reference) points is described. It is proposed to use Bezier curve (surface) compartments passing through additional reference points. The method allows you to reasonably set the compartments curvature and reduce the number of reference points.

Keywords: visualization, curve, surface, Bezier spline, interpolation, reference point, tangent, curvature.

Визуализация пространственных объектов является обязательным компонентом систем обработки информации различного назначения. Во многих случаях задача визуализации – представить образ трехмерной сцены, объекты которой имеют самую различную форму. Эффективным инструментом геометрического моделирования объектов произвольных форм являются сплайны. Они задаются в пространстве набором характерных (опорных) точек. Объекты большой протяженности представляются множеством отсеков ограниченного размера – сплайновых геометрических примитивов. Проектируемая геометрическая форма должна удовлетворять ряду требований. Это точное (или близкое) прохождение отсеков через опорные точки и стыковка отсеков без разрывов сплайн-функции и ее первой производной (гладкость). В случае применения сплайнов для описания объектов визуализации к этим требованиям добавляется еще одно: форма математического описания объектов должна позволять выполнять преобразования компьютерной графики на основе быстрых алгоритмов.

Существует множество разновидностей сплайнов, созданных для решения различных математических задач, но в геометрическом моделировании объектов визуализации традиционно применяется ограниченный набор сплайновых примитивов. К наиболее популярным из них можно отнести В-сплайны, бета-сплайны, сплайны Безье (Bezier), Кэтмулла-Рома (Catmull-Rom), Акимы (Akima) [1,2].

Отсек сплайна на плоскости задается четырьмя опорными точками $P_i(x_i,y_i)$, i=1,2,3,4. Математическое описание отсека представляется обычно в параметрической форме и в общем случае имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{4} BF_i(t) \cdot x_i\,,$$

$$y = \textstyle\sum_{i=1}^{4} BF_i(t) \cdot y_i\,, \qquad t = 0,..,1\,,$$

где t – параметр, который можно рассматривать как шаги по кривой отсека; $BF_i(t)$ – смешивающая функция (blendingfunction).

Каждый упомянутый вид сплайна имеет смешивающую функцию своего вида, что и определяет свойства сплайна. Все сплайны обладают хорошими формообразующими возможностями, поэтому выбор осуществляют, исходя из ответа на вопрос: являются ли недостатки того или иного сплайна существенными для решаемой задачи? Можно назвать следующие недостатки сплайновых примитивов.

Отсек В-сплайна не проходит точно через опорные точки. Кроме того, он расположен между двумя средними опорными точками, поэтому, чтобы провести кривую по четырем опорным точкам, требуется три отсека. В связи с этим геометрическое моделирование объектов на основе В-сплайнов имеет пониженную производительность. Смешивающие функции бета-сплайна гораздо сложнее, чем у других видов сплайнов, кроме того, он имеет тот же недостаток, что и В-сплайн. Основным недостатком сплайнов Кэтмулла-Рома является повышенное время формирования сплайновой кривой, так как при изменении параметра t в интервале [0,1] формируется отсек, соединяющий лишь две средние опорные точки. Для соединения четырех исходных точек нужна кривая, составленная из трех отсеков. Сплайн Акимы показывает самую большую сложность и самую низкую производительность проектирования геометрических форм, заданных характерными точками.

Отсек сплайна Безье точно проходит через крайние опорные точки P_1 и P_4, а две средние опорные точки P_2 и P_3 лежат на касательных к отсеку, проведенных через его крайние точки, и определяют изгибы отсека. Чтобы гладко стыковать отсеки, нужно правильно находить точки, лежащие на касательных. Если объект задан множеством характерных точек, которые можно принять за крайние точки отсеков, то возникает задача нахождения направлений касательных в этих точках и нахождения координат опорных точек, лежащих на этих касательных. Для этого нужны некоторые дополнительные условия, так как без них построить касательные к еще не существующему отсеку невозможно [3].

В итоге анализ возможностей рассмотренных сплайнов показывает, что применение их всех требует выполнения дополнительных условий или алгоритмических действий. Более других для геометрического моделирования объектов визуализации подходят сплайны Кэтмулла-Рома и Безье. Можно показать, что применение сплайна Безье не только позволяет редуцировать число исходных опорных точек, чего не позволяет сделать сплайн Кэтмулла-Рома, но и позволяет применить быстрые алгоритмы визуализации.

Для использования отсеков кривой Безье необходимо для каждого из них найти координаты двух опорных точек, лежащих на касательных к концевым точкам отсека. Определение четырех координат требует составления системы из четырех уравнений. Два из них можно составить, задав направления касательных, а два других, – задав расположение опорных точек на касательных. Касательная в некоторой опорной точке P_j принимается параллельной хорде, соединяющей предыдущую и последующую точки P_{j-1} и P_{j+1} [3]. Для нахождения координат опорных точек на касательных предлагается использовать прохождение отсека Безье через дополнительную опорную точку, в качестве которой используется опорная точка, лежащая между концевыми точками отсека. Другими словами, множество исходных опорных точек разбивается на тройки, причем две крайние точки каждой тройки принимаются за концы отсека Безье, а средняя точка тройки используется в качестве дополнительной.

Обозначив концевые точки отсека Безье P_1 и P_3, а точки, лежащие на касательных, Q_1 и Q_3, можно записать уравнения отсека в параметрической форме:

$$x(t) = (1-\mathrm{t})^3 x_{p1} + 3t(1-t)^2 x_{Q1} + 3t^2(1-t)x_{Q3} + t^3 x_{P3}\,, \quad (1)$$

$$y(t) = (1-t)^3 y_{P1} + 3t(1-t)^2 y_{Q1} + 3t^2(1-t)y_{Q3} + t^3 y_{P3}\,, \quad t = 0,..,1\,. \quad (2)$$

Обозначив среднюю точку P_2, можно записать условие прохождения отсека через эту точку:

$$x_{P2} = 0.125x_{P1} + 0.375x_{Q1} + 0.375x_{Q3} + 0.125x_{P3}, \quad (3)$$

$$y_{P2} = 0.125y_{P1} + 0.375y_{Q1} + 0.375y_{Q3} + 0.125y_{P3}\,, t = 0,..,1. \quad (4)$$

В выражениях (3), (4) принято, что параметрическая координата точки P_2 равна 0.5.

Направления касательных в концевых точках отсека (тангенсы углов α_1, α_3 наклона касательных) известным образом находятся через производные выражений (1), (2) по параметру t, вычисленные для значений t=0 и t=1:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{y_{Q1} - y_{P1}}{x_{Q1} - x_{P1}}, \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{y_{Q3} - y_{P3}}{x_{Q3} - x_{P3}}.$$

Тангенсы углов α_1, α_3 приравниваются тангенсам углов наклона хорд, проходящих через исходные опорные точки, предшествующие концевым и следующие за ними. Для точки P_1 это точки P_0 и P_2, для точки P_3 это точки P_2 и P_4:

$$\frac{y_{Q1} - y_{P1}}{x_{Q1} - x_{P1}} = \frac{y_{P2} - y_{P0}}{x_{P2} - x_{P0}}, \quad (5)$$

$$\frac{y_{Q3}-y_{P3}}{x_{Q3}-x_{P3}} = \frac{y_{P4}-y_{P2}}{x_{P4}-x_{P2}}. \tag{6}$$

Выражения (5), (6) вместе с выражениями (3), (4) образуют систему из четырех линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с четырьмя неизвестными – координатами x_{Q1}, y_{Q1}, x_{Q3}, y_{Q3}. В традиционной форме уравнения СЛАУ выглядят следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
1\cdot x_{Q1} + 1\cdot x_{Q3} + 0\cdot y_{Q1} + 0\cdot y_{Q3} &= \frac{-x_{P1}-x_{P3}+8\cdot x_{P2}}{3},\\
0\cdot x_{Q1} + 0\cdot x_{Q3} + 1\cdot y_{Q1} + 1\cdot y_{Q3} &= \frac{-y_{P1}-y_{P3}+8\cdot y_{P2}}{3},\\
-(y_{P2}-y_{P0})x_{Q1} + 0\cdot x_{Q3} + (x_{P2}-x_{P0})y_{Q1} + 0\cdot y_{Q3} &= \\
= x_{P1}\cdot y_{P0} - y_{P2}\cdot x_{P1} - y_{P1}\cdot x_{P0} + y_{P1}\cdot x_{P2}&,\\
0\cdot x_{Q1} - (y_{P4}-y_{P2})x_{Q3} + 0\cdot y_{Q1} + (x_{P4}-x_{P2})y_{Q3} &= \\
= x_{P3}\cdot y_{P2} - y_{P3}\cdot x_{P4} - y_{P3}\cdot x_{P2} + y_{P3}\cdot x_{P4}&.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Решение СЛАУ любым подходящим способом дает координаты опорных точек, лежащих на касательных, следовательно, теперь известны все опорные точки отсека Безье.

Рассмотренный прием можно распространить на моделирование поверхностей. Классический метод интерполяции криволинейных поверхностей отсеками сплайна Безье требует разбить множество исходных опорных точек на подмножества опорных точек, расположенных в узлах ортогональной параметрической координатной сетки. Отсек поверхности Безье описывается 16-ю опорными точками, 4 из которых находятся в углах отсека, а 12 задают его изгибы, но не лежат на его поверхности. Если исходное множество разбить на четверки характерных точек и принять их за угловые опорные точки отсеков, то для задания изгибов для каждого отсека нужно дополнительно определить 12 опорных точек. Они лежат на касательных, проведенных через угловые точки в направлениях параметрических координат, а также в диагональных направлениях [4]. Работу с отсеком поверхности нужно свести к работе с плоскими кривыми. Это возможно, если опорные точки равномерно расставлены в узлах параметрической координатной сетки. В этом случае касательные можно проводить к кривым плоских сечений поверхности.

В соответствии с предлагаемым способом в исходном множестве опорных точек выделяются подмножества из 9 точек с организацией 3×3. На каждом подмножестве рассматриваются тройки точек, лежащие в направлениях параметрических координат, а также в диагональных направлениях. В каждой тройке крайние точки принимаются за концевые опорные точки криволинейного плоского отсека Безье, а средняя точка является дополнительной точкой, через которую должен проходить отсек. Для определения направлений 12-ти касательных (по 3 касательных для каждой угловой точки подмножества) используются опорные точки исходного множества, предыдущие и последующие по отношению к угловой в каждом направлении параметрических координат, а также в диагональных направлениях. Тем самым задача определения 12-ти опорных точек для отсека поверхности Безье сводится к нахождению двух точек, лежащих на касательных, которые проведены через концевые точки, для каждого из плоских сечений отсека поверхности. Таких плоских сечений (плоских кривых Безье) для каждого отсека поверхности насчитывается 6: 4 в направлениях двух параметрических координат и 2 – в диагональных направлениях. Таким образом, для нахождения 12-ти опорных точек отсека, лежащих на касательных к поверхности Безье, нужно 6 раз составить и решить систему уравнений вида (7).

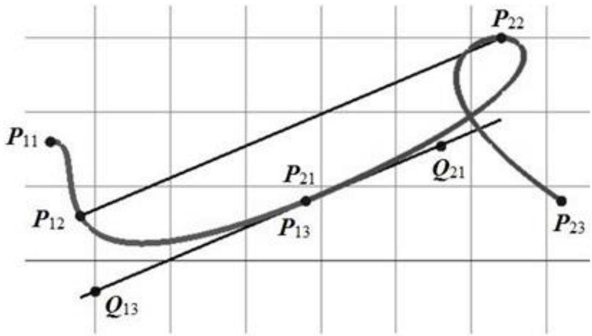
В итоговое описание отсека составной кривой (поверхности) входят координаты двух концевых опорных точек (четырех угловых в случае отсека поверхности) и двух точек, лежащих на касательных (двенадцати точек в случае поверхности). При этом промежуточные (дополнительные) опорные точки отбрасываются, так как они учтены при нахождении точек на касательных. Таким образом, для криволинейного отсека Безье из каждых трех исходных опорных точек остаются две, а для пространственного отсека из каждых девяти исходных опорных точек остаются четыре.

Исходные опорные точки могут быть расставлены в пространстве неравномерно. В этом случае можно предложить от исходных опорных точек перейти к новым опорным точкам, тоже принадлежащим проектируемой поверхности, но расставленным равномерно. Для такого перехода нужно применить один из методов интерполяции. С его помощью находится аналитическое математическое представление (интерполянт) проектируемой поверхности. Вычисление значений интерполянта с заданным шагом дает координаты новых опорных точек.

Хорошими интерполирующими свойствами обладают радиальные базисные функции (РБФ). Этот инструмент достаточно проработан, существуют рекомендации по применению РБФ для описания протяженных и замкнутых поверхностей, как в общей, так и в явной форме [5,6,7,8].

В результате проектирования геометрических форм с применением предлагаемого способа формируется гладкая кривая, поверхность, проходящая через опорные точки и имеющая обоснованные изгибы в районе концевых (угловых) опорных точек сегментов.

На рисунке в качестве примера показана кривая сложной формы, полученная гладкой стыковой двух отсеков кривой Безье.



Гладкая стыковка двух отсеков кривой Безье, проходящих через дополнительные опорные точки

В обозначениях опорных точек применены двойные индексы: P_{kj}, Q_{kj}, где k – номер отсека (k=1,2), а j – номер опорной точки (j=1,2,3). Конечная опорная точка предыдущего отсека совпадает с начальной опорной точкой последующего, что отражено двойным обозначением такой точки. Для демонстрации точности интерполяции на рисунке показаны дополнительные опорные точки P_{12}, P_{22}, которые не входят в итоговое описание сплайновой кривой. Также показана хорда $P_{12}P_{22}$ и параллельные ей касательные, проведенные через точку стыковки отсеков. На них обозначены найденные опорные точки Q_{13}, Q_{21}. Рисунок получен с помощью программы-моделера 3d Grapher 1.2. Вид рисунка показывает хорошие изобразительные возможности геометрических форм, полученных с применением предлагаемого способа. Предлагаемое математическое описание сплайнового представления пространственного объекта позволяет применить быстрый алгоритм вычисления промежуточных точек поверхности, основанный на методе конечных разностей [9].

Библиографический список

1. Шикин Е.В., Плис Л.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. 223 с.

2. Akima H.A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures // J. ACM. 1970. V.17. № 4. P.589–602. URL: http://bookfi.net/book/456586 (дата обращения: 15.03.2019).

3. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. М.: Мир, 1982. 304 с.

4. Косников Ю.Н. Применение бикубических сплайнов в графических системах реального времени // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2005. Т. 4. № 1 (9). С. 30-36.

5. Morse B.S. Interpolation Implicit Surfaces from Scattered Data using Compactly Supported Radial Basis Functions / B.S. Morse, T.S. Yoo, P.

Rheingans, D.T. Chen, K.R. Subramanian // Proceedings of the International Conference on Shape Modeling & Applications. 2001. P. 89-98.

6. Косников Ю.Н. Методика и технология компьютерного моделирования поверхностей свободных форм с применением радиальных базисных функций // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Научное периодическое издание. Серия: Технические науки. Информационные технологии. Пенза: Изд-во ПГТУ, 2014. №03(19). С. 176–183.

7. Walter F. Using radial basic functions for surface interpolation. 2016. URL:https://www.comsol.com/blogs/using-radial-basis-functions-for-surface-interpolation/

8. Косников Ю.Н., Хоанг Тхай Хо. Моделирование объектов интерфейса виртуального окружения для эргатических систем // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2016. №3. С. 16 – 28.

9. Косников Ю.Н. Геометрическое моделирование в графических системах реального времени. Пенза: Информационно-издательский центр Пензенского государственного университета, 2006. 218 с.

Косников Юрий Николаевич
Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: kosnikov@gmail.com

Kosnikov Yu.N.
Penza State University,
Penza, Russia

Новиков Алексей Валерьевич
Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Novikov A.A.
Penza State University,
Penza, Russia