МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ВСЕРОССИЙСКАЯ ГРУППА ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ IEEE
АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ООО «ОТКРЫТЫЕ РЕШЕНИЯ»
ОБЩЕСТВО «ЗНАНИЕ» РОССИИ
ПРИВОЛЖСКИЙ ДОМ ЗНАНИЙ

XXII Международная научно-техническая конференция

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ В ОБРАЗОВАНИИ, УПРАВЛЕНИИ, ЭКОНОМИКЕ И ТЕХНИКЕ

Сборник статей

Декабрь 2022 г.

Пенза

УДК 004
ББК 32.81я43+74.263.2+65.050.2я43
П781

П781 **ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ В ОБРАЗОВАНИИ, УПРАВЛЕНИИ, ЭКОНОМИКЕ И ТЕХНИКЕ :**
сборник статей XXII Международной научно-технической конференции. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2022. – 356 с.

ISBN 978-5-8356-1800-2
ISSN 2311-0406

Под редакцией ***В.И. Горбаченко,*** доктора технических наук, профессора;
В.В. Дрождина, кандидата технических наук, профессора

Информация об опубликованных статьях предоставлена в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) по договору № 573-03/2014К от 18.03.2014.

ISBN 978-5-8356-1800-2
ISSN 2311-0406

XXII International
scientific and technical conference

PROBLEMS OF INFORMATICS IN EDUCATION, MANAGEMENT, ECONOMICS AND TECHNICS

December, 2022

Penza

Таким образом, формализация РОС является начальным этапом решения задачи системного анализа.

Библиографический список

1. Боевой устав артиллерии. Часть 2. Дивизион, батарея, взвод, орудие / Министерство обороны Российской Федерации. – М.: Военное издательство, 2013. – 475 с.

2. Бахтияров, Р.Ж. Моделирование полумарковского процесса функционирования элементов разведывательно-огневых комплексов артиллерийских подразделений в ходе боевых действий / Р.Ж. Бахтияров, А.Ю. Козлов // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. – Том 3. – С. 42-48.

3. Губко, М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур / М.В. Губко. – М.: Ленанд, 2006. – 264 с.

Бахтияров Ринат Жаферович
Акционерное общество «Научно-производственное предприятие «Рубин», г. Пенза, Россия

Bakhtiyarov R. Zh.
Joint-Stock Company "Scientific and Production Enterprise "Rubin", Penza, Russia

---

УДК 004.9: 519.2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ПУТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ PERT-СЕТИ

М.М. Бутаев, А.А. Тарасов

ANALYTICAL ESTIMATION OF THE PATH DURATION OF A PARALLEL PERT NETWORK

M.M. Butaev, A.A. Tarasov

Аннотация. Цель работы – развитие методов расчёта характеристик PERT-сети. Объект исследования – аналитический метод расчёта продолжительности пути параллельного стохастического ациклического ориентированного графа. Предмет – формулы расчёта продолжительности параллельных независимых действий при случайной равномерно распределённой продолжительности. При выводе формул расчёта вероятностных характеристик применена теория вероятности. Корректность формул вероятности и плотности вероятности продолжительности группы трёх параллельных действий проиллюстрирована примером.

Ключевые слова: PERT, плотность вероятности, функция распределения, параллельные действия.

Abstract. The purpose of the work is to develop methods for calculating the characteristics of a PERT network. The object of research is an analytical method for calculating the path length of a parallel stochastic acyclic directed graph. Subject - formulas for calculating the duration of parallel independent actions with a random uniformly distributed duration. When deriving formulas for calculating probabilistic characteristics, the theory of probability was applied. The correctness of the formulas for the cumulative distribution probability and probability density functions of the duration of a group of three parallel actions is illustrated by an example.

Key words: PERT, probability density function, cumulative distribution function, parallel actions.

Введение

Вероятностные модели наиболее полно определяют характеристики продолжительности действий и предоставляют больше информации, чем интервальный подход [1]. Аналитическое определение функций распределения вероятности и плотности вероятности суммы независимых равномерно распределённых случайных величин (СВ) определены и применены для расчёта продолжительности последовательно выполняемых действий без использования рекурсии [2].

Продолжительность параллельно исполняемой группы из нескольких действий определяется от момента одновременного начала всех действий до независимого завершения всех действий [3]. Вероятность завершения этапа группы определяется произведением вероятностей завершения параллельных действий [4]: $F\mathrm{N}(t) = F_1(t)F_2(t)\ldots F_n(t)$. Функция $F\mathrm{N}(t)$ определяется как закон распределения максимума N СВ [5].

Обозначения и определения

Функции и параметры обозначены следующим образом:

функция распределения вероятности и плотность вероятности группы из N СВ -$F\mathrm{N}(t)$ и $f\mathrm{N}(t)$, соответственно. Символ N заменяется цифрой, обозначающей количество СВ в группе;

функция распределения вероятности и плотность вероятности i-й СВ - $F_i(t)$ и $f_i(t)$;

математическое ожидание и дисперсия группы из N СВ – EN и DN;

продолжительность i-й обработки имеет равномерное распределение $U(t_i) \in [a_i; b_i]$, $0 \le a_i$, $a_i < b_i$, $t_i \in T$;

плотность вероятности и функция распределения i-й СВ:

$$f_i(t) = \frac{1}{b_i - a_i}\left[H(t-a_i) - H(t-b_i)\right];$$
$$F_i(t) = \frac{t}{b_i - a_i}\left[H(t-a_i) - H(t-b_i)\right] + H(t-b_i), \tag{1}$$

где $H(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0; \\ 1, & 0 < t. \end{cases}$ - обобщённая функция Хевисайда (единичная ступенчатая функция).

Характеристики продолжительности действий

Параллельно выполняемые действия начинаются одновременно при $t = 0$. В интервале $[0; a_{max}]$, где $a_{max} = \max\limits_{i=1,N} a_i$ группа параллельно выполняемых действий достоверно не завершается, пока не завершиться все действия группы. Завершение возможно с вероятностью FN(t) на интервале $[a_{max}; b_{max}]$, где $b_{max} = \max\limits_{i=1,N} b_i$. При $t > b_{max}$ группа параллельно выполняемых действий достоверно завершится. Смещение интервала распределения группы действий увеличивается на величину смещения.

Границы подинтервалов кусочно-полиномиальных функций FN(t) и fN(t) определяются значениями b_j , $j = 1,\ldots J$, $J \le N$. Положение границ подинтервалов упорядочено по убыванию, наибольшее значение совпадает с b_{max}. Для определения последовательности значений границ подинтервалов используется вспомогательный массив $bb(K)$, полученный сортировкой массива $b(J)$ по убыванию значений элементов. Переменная $K \le J$ – количество перекрывающихся подинтервалов группы $bb(1) = b_{max}$. При сортировке $bb(K)$ в массиве индексов $I(K)$ сохраняются соответствующие номера параллельных действий.

Например, для распределения F3(t) параллельных СВ $t_1 \in [1, 4]$, $t_2 \in [2; 3]$, $t_3 \in [2{,}5; 5]$ значение $a_{min} = 1$, $a_{max} = 2{,}5$, $b_{max} = 5$ (рисунок 1). На интервале [2,5; 3] значения F3(t) определяются $F(t)$ СВ t_1, t_2, t_3 ($F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$). На интервале [3; 4] значения F3(t) определяются $F_1(t)$ и$F_3(t)$. На интервале [4; 5] значения F3(t) определяется функцией $F_3(t)$. Функции математического ожидания BN и дисперсии DN получаются традиционным образом.

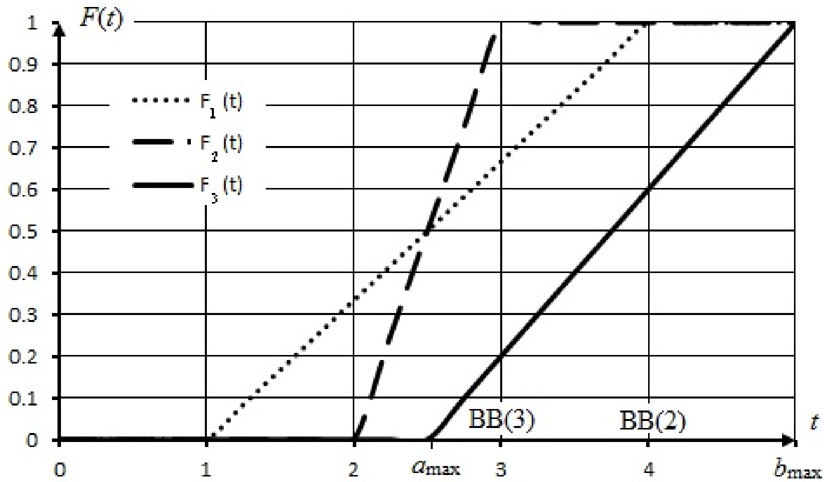

Рис. 1. Функции $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$

Для тривиального варианта K= 1 $f3(t)$ и $F3(t)$ определяются (1) при $i = 1$.

$$E3 = \frac{b_{\max}^2 - a_{\max}^2}{2\varsigma_1};$$

$$D3 = \frac{\left(b_{\max}^3 - a_{\max}^3\right)}{3\varsigma_1} - \frac{\left(b_{\max}^2 - a_{\max}^2\right)E3}{\varsigma_1} + \frac{\left(b_{\max} - a_{\max}\right)E3^2}{\varsigma_1},$$

где $\varsigma_1 = b\big(I(1)\big) - a\big(I(1)\big)$.

Для K= 2:

$$f3(t) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\varsigma_1\varsigma_2}\left[H\left(t - a_{\max}\right) - H\left(t - b_{\min}\right)\right] +$$

$$+\frac{\theta_1}{\varsigma_1}\left[H\left(t - b_{\min}\right) - H\left(t - b_{\max}\right)\right];$$

$$F3(t) = \frac{\theta_1\theta_2}{\varsigma_1\varsigma_2}\left[H\left(t - a_{\max}\right) - H\left(t - b_{\min}\right)\right] +$$

$$+\frac{\theta_1}{\varsigma_1}\left[H\left(t - b_{\min}\right) - H\left(t - b_{\max}\right)\right] + H\left(t - b_{\max}\right);$$

$$E3=\frac{2\left(b_{\max}^3-a_{\max}^3\right)}{3\varsigma_1\varsigma_2}-\frac{\left(b_{\max}^2-a_{\max}^2\right)\varsigma_1}{2\varsigma_1\varsigma_2};$$

$$D3=\frac{b_{\max}^4-a_{\max}^4}{2\varsigma_1\tau_2}-\frac{\left(b_{\max}^3-a_{\max}^3\right)\left(4E3+\varsigma_1\right)}{3\varsigma_1\varsigma_2}+$$

$$+\frac{\left(b_{\max}^2-a_{\max}^2\right)\left(E3+\varsigma_1\right)E3}{\varsigma_1\varsigma_2}-\frac{\left(b_{\max}-a_{\max}\right)\varsigma_1E3^2}{\varsigma_1\varsigma_2},$$

где $\theta_1=t-a\left(I(1)\right), \theta_2=t-a\left(I(2)\right), \varsigma_2=b\left(I(2)\right)-a\left(I(2)\right)$, $b_{\min}=\min\limits_{j=1,2}b_j$

Для K= 3:

$$f3(t)=\frac{\theta_1\theta_2+\theta_1\theta_3+\theta_2\theta_3}{\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3}\left[H\left(t-a_{\max}\right)-H\left(t-BB(3)\right)\right]+$$

$$+\frac{\theta_1+\theta_2}{\varsigma_1\varsigma_2}\left[H\left(t-BB(3)\right)-H\left(t-BB(2)\right)\right]+$$

$$+\frac{\theta_1}{\varsigma_1}\left[H\left(t-BB(2)\right)-H\left(t-b_{\max}\right)\right];$$

$$F3(t)=\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{\varsigma_1\varsigma_2\varsigma_3}\left[H\left(t-a_{\max}\right)-H\left(t-BB(3)\right)\right]+$$

$$+\frac{\theta_1\theta_2}{\varsigma_1\varsigma_2}\left[H\left(t-BB(3)\right)-H\left(t-BB(2)\right)\right]+$$

$$+\frac{\theta_1}{\varsigma_1}\left[H\left(t-BB(2)\right)-H\left(t-b_{\max}\right)\right]+H\left(t-b_{\max}\right);$$

$$E3=\frac{2\left[BB(2)^3-a_{\max}^3\right]}{3\varsigma_1\varsigma_2}-\frac{\left[BB(2)^2-a_{\max}^2\right]\varsigma_1}{2\varsigma_1\varsigma_2}+\frac{\left[b_{\max}^2-BB(2)^2\right]}{2\varsigma_1};$$

$$D3=\frac{BB(2)^4-a_{\max}^4}{2\varsigma_1\varsigma_2}-\frac{\left[BB(2)^3-a_{\max}^3\right]\left(4E3+\varsigma_1\right)}{3\varsigma_1\varsigma_2}+$$

$$+\frac{\left[BB(2)^2-a_{\max}^2\right]\left(E3+\varsigma_1\right)E3}{\varsigma_1\varsigma_2}-\frac{\left[BB(2)-a_{\max}\right]\varsigma_1E3^2}{\varsigma_1\varsigma_2}+$$

$$+\frac{\left[b_{\max}^3-BB(2)^3\right]}{3\varsigma_1}-\frac{\left[b_{\max}^2-BB(2)^2\right]E3}{\varsigma_1}+\frac{\left[b_{\max}-BB(2)\right]E3^2}{\varsigma_1},$$

где $\theta_3=t-a\left(I(3)\right),\ \varsigma_3=b\left(I(3)\right)-a\left(I(3)\right)$

Вычисления fN(t), FN(t) при N> 3 выполняются по рекуррентным формулам [6].

Графики $f3(t)$ (1) для $t_1 \in [2; 3]$, $t_2 \in [2; 3]$, $t_3 \in [2; 3]$; $f3(t)$ (2) $t_1 \in [2; 3]$, $t_2 \in [1; 4]$, $t_3 \in [1; 3]$; $f3(t)$ (3) $t_1 \in [1; 4]$, $t_2 \in [2; 4]$, $t_3 \in [1; 3]$; $f3(t)$ (4) $t_1 \in [1; 4]$, $t_2 \in [1; 3]$, $t_3 \in [1; 2]$ приведены на рисунке 2. Графики функции $f3(t)$ для различных значений интервалов обозначены дополнительной цифрой в скобках.

Аналитические зависимости позволяют, например, рассчитать вероятность завершения группы параллельно исполняемых трёх обработок $F3(2,2) = 0,24$ при $t_1 \in [1; 4]$, $t_2 \in [1; 3]$, $t_3 \in [1; 2]$, а также риск незавершения в момент t = 3,25 группы параллельно исполняемых трёх обработок $R(3,25) = 1 - F3(3,25) = 0,25$ при $t_1 \in [2; 3]$, $t_2 \in [1; 4]$, $t_3 \in [1; 3]$. Медиана и децили распределения при тех же значений t_1, t_2, t_3Me(T) = 2,732 и $t_{0,8} = 3,4$; $t_{0,25} = 2,225$.

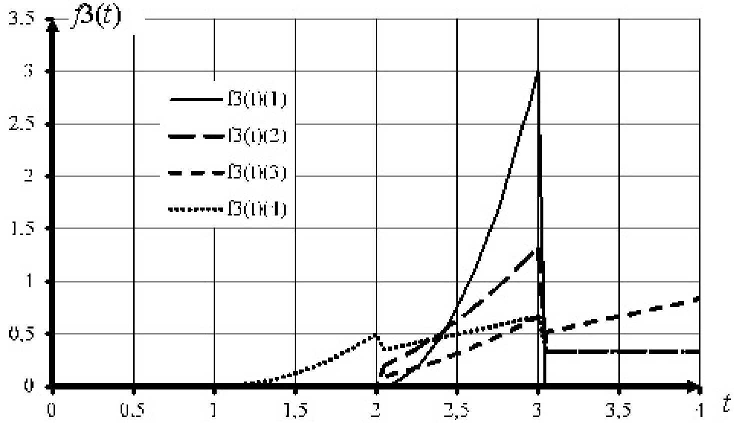

Рис. 2. Графики функций $f3(t)$

Заключение

Полученные аналитическим выражения расчета продолжительности параллельно исполняемых действий повышает адекватность оценки вероятностно-временных характеристик на этапе разработки планов и систем. Оценка продолжительности параллельных действий расширяет возможности оценки вариантов построения и улучшает обоснование вариантов построения планов и систем.

Библиографический список

1. Применение сетевой модели на основе многовариантных графов с динамической структурой для формирования планов-графиков создания

радиолокационных станций дальнего обнаружения / С.Ф. Боев, А.С. Логовский, А.М. Казанцев, А.В. Ивойлова, А.В. Тимошенко, П.Н. Тришкин / Радиопромышленность. – 2020. – Т.30, №3. – С. 8-20. – DOI: 10.21778/2413-9599-2020-30-3-8-20.

2. Бутаев М.М. Характеристики распределений сумм нескольких равномерно распределённых случайных значений времён обработки запроса инфокоммуникационной системой // Вопросы радиоэлектроники. – 2019. – № 12. – С. 59-63. – DOI: 10.21778/2218-5453-2019-12-59-63.

3. Голенко-Гинзбург Д.И. Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками. – Воронеж: Научная книга, 2010. – 284 с.

4. Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным. - СПб.: Наука, 2001. - 295 с.

5. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятности и её инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.

6. Martin J.J. Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network // Operations Research, 1965. – Vol. 13. - No. 1. - P. 46-66.

Бутаев
Михаил Матвеевич
Тарасов
Андрей Анатольевич
АО «НПП «Рубин»,
г. Пенза, Россия

Butaev M. M.
Tarasov A. A.
JSC «SIE «Rubin»,
Penza, Russia

УДК 519.21

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Н. И. Дубровин

THE DISTRIBUTION FUNCTIONS OF RANDOM VARIABLES

N.I. Dubrovin

Аннотация. В данной работе предлагается один из возможных способов уменьшения трафика передачи данных в коммуникационной сети за счет замены случайной величины, описывающей нагрузку, на дискретную случайную величину с малым количеством возможных значений.