МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ВСЕРОССИЙСКАЯ ГРУППА ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ IEEE
АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ООО «ОТКРЫТЫЕ РЕШЕНИЯ»
ОБЩЕСТВО «ЗНАНИЕ» РОССИИ
ПРИВОЛЖСКИЙ ДОМ ЗНАНИЙ

XXII Международная научно-техническая конференция

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ В ОБРАЗОВАНИИ, УПРАВЛЕНИИ, ЭКОНОМИКЕ И ТЕХНИКЕ

Сборник статей

Декабрь 2022 г.

Пенза

УДК 004
ББК 32.81я43+74.263.2+65.050.2я43
П781

П781 **ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ В ОБРАЗОВАНИИ, УПРАВЛЕНИИ, ЭКОНОМИКЕ И ТЕХНИКЕ :**
сборник статей XXII Международной научно-технической конференции. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2022. – 356 с.

ISBN 978-5-8356-1800-2
ISSN 2311-0406

Под редакцией ***В.И. Горбаченко,*** доктора технических наук, профессора;
В.В. Дрожжина, кандидата технических наук, профессора

Информация об опубликованных статьях предоставлена в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) по договору № 573-03/2014К от 18.03.2014.

ISBN 978-5-8356-1800-2
ISSN 2311-0406

XXII International
scientific and technical conference

PROBLEMS OF INFORMATICS IN EDUCATION, MANAGEMENT, ECONOMICS AND TECHNICS

December, 2022

Penza

Приоров Андрей Леонидович
Гурьянов
Егор Дмитриевич
Назаров Даниил Алексеевич
Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль, Россия

PriorovA. L.
GuryanovE. D.
NazarovD.A.
P.G. Demidov Yaroslavl State
University,
Yaroslavl, Russia

УДК 519.6

ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ, СУММИРУЕМЫЕ СРЕДНИМИ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ

О.Э. Яремко, Н.Н. Яремко, К. Р. Забабурин

DISCRETE FOURIER TRANSFORMS SUMMED BY THE ARITHMETIC MEANS

O.E. Yaremko, N.N. Yaremko, K. R. Zababurin

Аннотация. Предлагается дискретное преобразование типа Фурье. Для этого преобразования разложение сигнала проводится по системе тригонометрических функций, полученной суммированием средних арифметических разложения дискретного преобразования Фурье. Получены формулы для коэффициентов преобразования типа Фурье. Установлена связь с суммой Фейера 2 и 4 порядка. Результаты можно применять для анализа сигналов.

Ключевые слова: дискретное преобразование типа Фурье, сумма Фейера, ядро Джексона.

Abstract. A discrete Fourier-type transformation is proposed. For this transformation, the signal is expanded in terms of a system of trigonometric functions obtained by summing the arithmetic means of the expansion of the discrete Fourier transform. Formulas for Fourier-type transformation coefficients are obtained. A connection with the Fejér sum of the 2nd and 4th orders is established. The results can be used for signal analysis.

Key words: Discrete Fourier-type transformation, Fejér sum, Jackson core.

Проблема суммирования рядов Фурье привлекает внимание математиков. Например, А. Н. Колмогоров нашел функцию из класса $L_1(T)$, ряд Фурье которой расходится во всех точках. Таким образом, задача восстановления функции $f \in L_1(T)$, по последовательности ее коэффициентов Фурье $\{c_k\}\ k \in Z$ актуальна. Пример Колмогорова показывает, что непосредственным суммированием ряда Фурье эта задача не решается, так как ряд Фурье может расходиться. Даже если функция f непрерывная, то может оказаться, что ее ряд Фурье расходится в некоторых точках (соответствующий пример приведен, например, в [1]). Решение проблемы предполагает суммирование рядов Фурье методом средних арифметических.

Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, следовательно, 2π- периодически продолжаема на всю действительную ось. Пусть $S_n(x)$ - ее суммы Фурье, а $D_n(x)$ - ядра Дирихле, $\boldsymbol{n}$= 0,1, 2,...Рассмотрим средние арифметические:

$$\sigma_n = \frac{S_0(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}, \Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_n(x)}{n+1}$$

Сумма σ_n называется суммой Фейера n-го порядка функции f, а $\Phi_n(x)$ – ядром Фейера n-го порядка.

Теорема. Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимает на его концах равные значения, то последовательность ее сумм Фейера сходится равномерно на этом отрезке к самой функции.

Как известно, вычислительная реализация рядов Фурье предполагает использование дискретного преобразования Фурье. Приведем необходимые сведения. Дискретное преобразование Фурье (DFT) преобразует конечную последовательность значений функции на равномерной сетке в последовательность комплекснозначных амплитуд гармонических составляющих. Обратное дискретное преобразование Фурье – это частичная сумма ряда Фурье, в качестве коэффициентов выступают комплекснозначные амплитуды гармоник. DFT можно интерпретировать как представление в частотной области входной последовательности значений сигнала. DFT используется для выполнения Фурье-анализа во многих практических приложениях. DFT также используется для эффективного решения уравнений в частных производных и выполнения других операций, таких как свертки или умножение больших целых чисел, кодирование сигнала.

Формулы для прямого и обратного дискретного преобразования Фурье [2] имеют вид:

прямое

$$X_l = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} lk} x_k \,, \tag{1}$$

обратное

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} lj} X_l . \tag{2}$$

Дискретное преобразование Фурье есть дискретный аналог ряда Фурье. Значит, существуют непрерывные функции (пример Колмогорова) для которых обратное дискретное преобразование Фурье восстанавливает сигнал и при этом алгоритм не является устойчивым. Мы предполагаем, что дискретные преобразования Фурье на основе метода суммирования средними арифметическими решит проблему устойчивости алгоритма восстановления сигнала.

В основе наших рассуждений лежит формула для конечной тригонометрической суммы. Пусть $\varepsilon = e^{i\theta}$, тогда справедлива формула

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(N - |k|\right) \varepsilon^k = \left(\frac{\sin \frac{N}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \tag{3}$$

Основной результат содержится в теореме.

Теорема 1. Пусть дана последовательность отсчетов $x_m, m = 0, \ldots, N-1$ определяем дискретное преобразование Фурье

$$X_k = \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N} mk} x_m, |k| = 0, \ldots, N-1, \tag{4}$$

тогда справедлив дискретный аналог формулы Фейера [3]

$$x_n = \frac{1}{N^2} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(N - |k|\right) e^{i\frac{2\pi}{N} nk} X_k, n = 0, \ldots, N-1 . \tag{5}$$

Доказательство. Преобразуем правую часть доказываемой формулы. Имеем цепочку равенств

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(N-|k|\right)e^{i\frac{2\pi}{N}nk}X_k=\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(N-|k|\right)e^{i\frac{2\pi}{N}nk}\sum_{m=0}^{N-1}e^{-i\frac{2\pi}{N}mk}x_m=$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(N-|k|\right)e^{i\frac{2\pi k}{N}(n-m)}\right)x_m,=0,\dots,N-1.$$

По формуле (5) имеем

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(N-|k|\right)e^{i\frac{2\pi k}{N}(n-m)}=N^2\delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера. Формула обращения доказана.

Замечание. Формула (5) интерпретируется как метод суммирования средними арифметическими формулы обращения дискретного преобразования Фурье. В самом деле, запишем формулу обращения дискретного преобразования Фурье

$$x_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}nk}X_k, n=0,\dots,N-1.$$

Положим для отрицательных номеров

$$x_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}nk}X_k, n=-1,\dots,-(N-1).$$

Пусть

$$s_k=\sum_{p=-k}^{k}x_p, k=0,\dots,N-1,$$

тогда

$$\sum_{k=0}^{N-1}s_k=Nx_0+(N-1)(x_1+x_{-1})+\dots+1\cdot(x_{N-1}+x_{-N+1}).$$

Из выражения (5) мы получим

$$\sum_{k=0}^{N-1}s_k=\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(N-|k|\right)e^{i\frac{2\pi}{N}nk}X_k=N^2x_n.$$

Обобщение.Метод суммирования средними арифметическими можно применить дважды. При этом вместо ядра Фейера нужно использовать ядро Джексона [4].

$$J_n(\theta)=\frac{2}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^4$$

Можно видеть, что для ядра Джексона разложение в виде тригонометрического полинома имеет вид

$$J_n(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{k=-(2n-2)}^{(2n-2)} j_k e^{ik\theta},$$

где j_k- коэффициенты разложения в ряд Фурье.

Теорема 2. Пусть дана последовательность отсчетов $x_m, m=0,...,N-1$, определяем дискретное преобразование Фурье

$$X_k=\sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}mk} x_m, |k|=0,...,2(N-1),$$

тогда справедлив дискретный аналог формулы Джексона

$$x_n=\frac{2N^2+1}{N^3}\sum_{k=-2(N-1)}^{2(N-1)} j_k e^{i\frac{2\pi}{N}nk} X_k, n=0,...,N-1.$$

Обсуждение. Формула обращения (5) есть дискретный вариант суммирования ряда Фурье по методу Чезаре-Фейера. Для вычислений обратного дискретного преобразования Фурье можно применять быстрые алгоритмы. Принципы их работы те же самые, что и у алгоритма быстрого преобразования Фурье (FFT). Вместе с тем можно применять обычный алгоритм FFT. Для этого надо вычислить последовательность дискретных амплитуд X_k, продолжить ее по периодичности для целых значений частоты k вне промежутка $[0, N-1]$ и затем нормировать весовыми коэффициентами j_k. Авторы надеются, что алгоритмы, созданные на базе ядер Фейера и Джексона, будут полезны для фильтрации сигналов.

Библиографический список

1. Ульянов П.Л. А.Н. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье // МН, 38:4(232) (1983), 51–90.

2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2006. – С. 751.

3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. – М.: Наука, 1961. – 436 с.

4. Жук В.В., Натансон Г.И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – С. 188.

Яремко Олег Эмануилович	**Yaremko O.E.**
МГТУ СТАНКИН,	MSTU STANKIN,
г. Москва, Россия	Moscow, Russia
Яремко Наталия Николаевна	**Yaremk oN.N.**
МИСиС НИТУ,	MISiS NUST,
г. Москва, Россия	Moscow, Russia
Забабурин Кирилл Романович	**Zababurin K. R.**
МГТУ СТАНКИН,	MSTU STANKIN,
г. Москва, Россия	Moscow, Russia

УДК 519.6

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

О.Э. Яремко, К. Р. Забабурин

A DISCRETE ANALOGUE OF THE TAYLOR FORMULA

O.E. Yaremko, K. R. Zababurin

Аннотация. Конструируется дискретный аналог ряда Тейлора.Для этого преобразования разложение сигнала проводится по системе степенных функций. В полученной формуле для коэффициентов дискретного ряда производные заменяются их разностными отношениями. Показано, что в пределе дискретный ряд Тейлора превращается в частичную сумму ряда Тейлора. Результаты можно применять для анализа сигналов.

Ключевые слова: ряд Тейлора, числа Стирлинга, интерполяционная формула.

Abstract. A discrete analogue of the Taylor series is constructed. For this transformation, the decomposition of the signal is carried out according to a system of power functions. In the resulting formula for the coefficients of a discrete series, the derivatives are replaced by their difference relations. It is shown that in the limit, the discrete Taylor series turns into a partial sum of the Taylor series. The results can be used for signal analysis.

Key words: taylor series, Stirling numbers, interpolation formula.