МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ВСЕРОССИЙСКАЯ ГРУППА ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ IEEE
АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ООО «ОТКРЫТЫЕ РЕШЕНИЯ»
ОБЩЕСТВО «ЗНАНИЕ» РОССИИ
ПРИВОЛЖСКИЙ ДОМ ЗНАНИЙ

XXII Международная
научно-техническая конференция

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ В ОБРАЗОВАНИИ, УПРАВЛЕНИИ, ЭКОНОМИКЕ И ТЕХНИКЕ

Сборник статей

Декабрь 2022 г.

Пенза

УДК 004
ББК 32.81я43+74.263.2+65.050.2я43
П781

П781 **ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ В ОБРАЗОВАНИИ, УПРАВЛЕНИИ, ЭКОНОМИКЕ И ТЕХНИКЕ :**
сборник статей XXII Международной научно-технической конференции. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2022. – 356 с.

ISBN 978-5-8356-1800-2
ISSN 2311-0406

Под редакцией ***В.И. Горбаченко,*** доктора технических наук, профессора;
В.В. Дрождина, кандидата технических наук, профессора

Информация об опубликованных статьях предоставлена в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) по договору № 573-03/2014К от 18.03.2014.

ISBN 978-5-8356-1800-2
ISSN 2311-0406

XXII International
scientific and technical conference

PROBLEMS OF INFORMATICS IN EDUCATION, MANAGEMENT, ECONOMICS AND TECHNICS

December, 2022

Penza

4. Жук В.В., Натансон Г.И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – С. 188.

Яремко Олег Эмануилович
МГТУ СТАНКИН,
г. Москва, Россия
Яремко Наталия Николаевна
МИСиС НИТУ,
г. Москва, Россия
Забабурин Кирилл Романович
МГТУ СТАНКИН,
г. Москва, Россия

Yaremko O.E.
MSTU STANKIN,
Moscow, Russia
Yaremk oN.N.
MISiS NUST,
Moscow, Russia
Zababurin K. R.
MSTU STANKIN,
Moscow, Russia

УДК 519.6

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

О.Э. Яремко, К. Р. Забабурин

A DISCRETE ANALOGUE OF THE TAYLOR FORMULA

O.E. Yaremko, K. R. Zababurin

Аннотация. Конструируется дискретный аналог ряда Тейлора.Для этого преобразования разложение сигнала проводится по системе степенных функций. В полученной формуле для коэффициентов дискретного ряда производные заменяются их разностными отношениями. Показано, что в пределе дискретный ряд Тейлора превращается в частичную сумму ряда Тейлора. Результаты можно применять для анализа сигналов.

Ключевые слова: ряд Тейлора, числа Стирлинга, интерполяционная формула.

Abstract. A discrete analogue of the Taylor series is constructed. For this transformation, the decomposition of the signal is carried out according to a system of power functions. In the resulting formula for the coefficients of a discrete series, the derivatives are replaced by their difference relations. It is shown that in the limit, the discrete Taylor series turns into a partial sum of the Taylor series. The results can be used for signal analysis.

Key words: taylor series, Stirling numbers, interpolation formula.

Ряды Тейлора применяются при аппроксимации функции многочленами. В частности, линеаризация уравнений происходит путём разложения в ряд Тейлора и отсечения всех членов выше первого порядка. Пусть заданы некоторые попарно различные точки, которые находятся друг от друга на некотором фиксированном расстоянии $x_i = x_0 + ih$,i=0,1,…,n – узлы интерполяции и пусть $y_i = f(x_i)$ значения функции $y = f(x)$ в этих точках. Первая интерполяционная формула Ньютона имеет вид [1]

$$P_N(x) = y_0 + q^{\underline{1}}\frac{\Delta y_0}{1!} + q^{\underline{2}}\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \cdots + q^{\underline{N}}\frac{\Delta^N y_0}{N!},$$

где

$$q^{\underline{p}} = q \cdot (q-1) \cdot (q-2) \cdot \ldots \cdot (q-p+1),\ q = \frac{x-x_0}{h}$$

выражается в виде убывающей последовательности множителей.

Разложение по степеням q функции $q^{\underline{p}}$ имеет вид [2]

$$q^{\underline{p}} = \sum_{k=1}^{p} s(p,k)\, q^k,$$

где $s(p,k)$ – числа Стирлинга первого рода [2],$\Delta^k y_0$ разность порядка k. Раскладывая по степеням q, получим разложение полинома $P_N(x)$ по убывающим факториалам

$$P_N(x) = y_0 + \sum_{r=1}^{N} q^{\underline{r}}\frac{\Delta^r y_0}{r!} = y_0 + \sum_{r=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{r} s(r,k)\, q^k\right)\frac{\Delta^r y_0}{r!}$$

Меняя порядок суммирования, получим выражение интерполяционного многочлена $P_N(x)$в виде

$$P_N(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{N} q^k \left(\sum_{r=k}^{N} s(r,k)\frac{\Delta^r y_0}{r!}\right). \qquad (1)$$

Пусть теперь $x_i = x_0 + ih, y_i = f(x_i)$, положим в формуле (1) $x = x_j$, тогда получим

$$y_j = y_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{r=k}^{N} s(r,k)\frac{\Delta^r y_0}{h^k r!}\right)\left(x_j - x_0\right)^k. \qquad (2)$$

Интерпретация формулы (2) заключается в следующем: определим последовательность коэффициентов $a_{k,N}$формулой

$$a_{k,N} = \sum_{r=k}^{N} s(r,k)\frac{\Delta^r y_0}{h^k r!}.$$

Тогда из формулы (2) получим разложение последовательности $\{y_j\}$ по степеням $(x_j - x_0)$:

$$y_j = y_0 + \sum_{k=1}^{N} a_{k,N}\left(x_j - x_0\right)^k. \qquad (3)$$

Замечание. Сумма (3) представляет дискретный аналог формулы Тейлора.

Теорема. Если $N \to \infty, h \to 0$, то сумма (3) стремится к частичной сумме ряда Тейлора:

$$f(x_0) + \sum_{k=1}^{N} a_k (x - x_0)^k.$$

Рассмотрим частные случаи формулы (3).

Следствие 1. Дискретный аналог формулы Тейлора второго порядка. В случае $N = 2$ числа Стирлинга имеют вид [2]:

$s(1,1) = 1, s(2,1) = -1, s(2,2) = 1,$

значит,

$a_{k,2} = \sum_{r=k}^{2} s(r,k) \frac{\Delta^r y_0}{h^k r!},$

$$a_{1,2} = \sum_{r=1}^{2} s(r,1) \frac{\Delta^r y_0}{h^1 r!} = s(1,1) \frac{\Delta^1 y_0}{h^1 1!} + s(2,1) \frac{\Delta^2 y_0}{h^1 2!} = \frac{\Delta^1 y_0}{h^1 1!} - \frac{\Delta^2 y_0}{h^1 2!} =$$

$a_{2,2} = s(2,2) \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 2!} = \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 2!}.$

В результате получим формулу

$$y_j = y_0 + \sum_{k=1}^{2} a_{k,2} \left(x_j - x_0\right)^k =$$

$$= y_0 + a_{1,2}\left(x_j - x_0\right)^1 + a_{2,2}\left(x_j - x_0\right)^2 =$$

$$= y_0 + \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta^1 y_0}{1} - \frac{\Delta^2 y_0}{2}\right)\left(x_j - x_0\right) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 2}\left(x_j - x_0\right)^2.$$

Пример 1. Показательная функция $y_j = exp(x_j)$. При $x_0 = 0$ получим

$\Delta^1 y_0 = e^h - 1, \Delta^2 y_0 = (e^h - 1)^2,$

тогда

$$y_j = 1 + \frac{1}{h}\left(\frac{(e^h - 1)}{1} - \frac{(e^h - 1)^2}{2}\right) x_j + \frac{(e^h - 1)^2}{h^2 2} x_j^2.$$

При $h \to 0$ получим приближенную формулу

$y_j = e^{x_j} \cong 1 + x_j + \frac{1}{2!} x_j^2.$

Пример 2. Получим дискретный аналог бесконечной убывающей последовательности для последовательности отсчетов $y_j = \frac{1}{1+x_j}$, в окрестности точки $x_0 = 0$ получим

$\Delta^1 y_0 = -\frac{h}{1+h}, \Delta^2 y_0 = \frac{2h^2}{1+3h+2h^2}.$

Тогда

$y_j = 1 - \frac{1+3h}{1+3h+2h^2} x_j + \frac{1}{1+3h+2h^2} x_j^2.$

При $h \to 0$ получим приближенную формулу

$y_j \cong 1 - x_j + x_j^2.$

Пример 3. Бином Ньютона $y_j = \left(1+x_j\right)^3$. Для разложения в окрестности точки $x_0 = 0$ получим данные:

$\Delta^1 y_0$=$(1+h)^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3$,

$\Delta^2 y_0 = (1+2h)^3 - 2(1+h)^3 + 1 = 6h^2 + 6h^3$.

Тогда

$$y_j = 1 + (3 - 2h^2)\left(x_j - x_0\right) + (3 + 3h)\left(x_j - x_0\right)^2.$$

При $h \to 0$ получим приближенную формулу

$$y_j \cong 1 + 3\left(x_j - x_0\right) + 3\left(x_j - x_0\right)^2.$$

Следствие 2. Дискретный аналог формулы Тейлора третьего порядка. В этом случае N=3, значит, числа Стирлинга имеют вид

$s(1,1) = 1, s(2,1) = -1, s(3,1) = 2, s(2,2) = 1$,

тогда,

$a_{k,3} = \sum_{r=k}^{3} s(r,k)\frac{\Delta^r y_0}{h^k r!}$,

$a_{1,3} = \sum_{r=1}^{3} s(r,1)\frac{\Delta^r y_0}{h^1 r!} = s(1,1)\frac{\Delta^1 y_0}{h^1 1!} + s(2,1)\frac{\Delta^2 y_0}{h^1 2!} + s(3,1)\frac{\Delta^3 y_0}{h^1 3!}$=

$= \frac{\Delta^1 y_0}{h^1 1!} - \frac{\Delta^2 y_0}{h^1 2!} + 2\frac{\Delta^3 y_0}{h^1 3!} = \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta^1 y_0}{1!} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + 2\frac{\Delta^3 y_0}{3!}\right)$,

$a_{2,3} = \sum_{r=2}^{3} s(r,2)\frac{\Delta^r y_0}{h^2 r!} = \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 2!} - 3\frac{\Delta^3 y_0}{h^2 3!} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 y_0}{2!} - 3\frac{\Delta^3 y_0}{3!}\right)$,

$a_{3,3} = s(3,3)\frac{\Delta^3 y_0}{h^3 3!} = \frac{\Delta^3 y_0}{h^3 3!}$.

В результате получим формулу

$$y_j = y_0 + \sum_{k=1}^{3} a_{k,3}\left(x_j - x_0\right)^k =$$

$$= y_0 + a_{1,3}\left(x_j - x_0\right) + a_{2,3}\left(x_j - x_0\right)^2 + a_{3,3}\left(x_j - x_0\right)^3 =$$

$$= y_0 + \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta^1 y_0}{1!} - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3}\right).\left(x_j - x_0\right) + \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}\right)\left(x_j - x_0\right)^2 +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{h^3 6}\left(x_j - x_0\right)^3.$$

Обсуждение. Разложения последовательности отсчетов сигнала в дискретный аналог ряда Тейлора могут найти применения для фильтрации сигнала от скачкообразных изменений.

Библиографический список

1. Березин, И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. – М.: Физматлит, 1962. – Т. I.

2. M. Abramowitz, I. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover, 1972. – P. 824.

Яремко
Олег Эмануилович
Забабурин
Кирилл Романович
МГТУ СТАНКИН,
г. Москва, Россия

Yaremko O.E.
Zababurin K. R.
MSTU STANKIN,
Moscow, Russia