Яремко О.Э. Формулы типа Даламбера для волнового уравнения на двухслойной действительной оси в CAS Maxima. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVI Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2016. – С. 62-65.

УДК 004

ФОРМУЛЫ ТИПА ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ДВУХСЛОЙНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ В CAS MAXIMA

О.Э. Яремко

D'ALAMBERT TYPE FORMULA FOR THE WAVE EQUATION ON THE TWO-LAYER REAL AXIS IN CAS MAXIMA

O.E. Yaremko

Аннотация. Вывод формулы типа Даламбера для продольных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности, рассматривается методом операторов преобразования средствами CASMaxima.

Ключевые слова: волновое уравнение, формула Даламбера, оператор преобразования.

Abstract. D'Alembert formula type for longitudinal oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities by operators transformation means and received CAS Maxima.

Keywords: wave equation, D'Alembert formula, transformation operator.

Рассмотрим сепаратную систему волновых уравнений на двухслойной действительной оси

$$u''_{1tt} = a_1^2 u''_{1xx}, x < 0, t > 0;$$

$$u''_{2tt} = a_2^2 u''_{2xx}, x > 0, t > 0;$$

по начальным условиям Коши

$$u_i(0, x, a_1, a_2, k) = f_i(x), i = 1,2; x \in I_1;$$

$$u'_i(0, x, a1, a2, k) = 0, i = 1,2; x \in I_1;$$

$$I_1 = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), -$$

и с условиями сопряжения в точке стыка $x = 0$:

$$u_1 = u_2, \quad u'_{1x} = k u'_{2x}, \quad x = l, t > 0,$$

$$u(t, x, a1, a2, k) = \begin{cases} u_1(t, x, a1, a2, k), x < 0; \\ u_2(t, x, a1, a2, k), x > 0. \end{cases}$$

Считаем также согласованными начальные и краевые условия

$$f_1 = f_2, \quad f_{1x} = k f_{2x}, \quad x = 0.$$

Решение данной задачи впервые получил Ильин В.А. [1]. Применим метод операторов преобразования [3]. Вычисления будем проводить в CAS Maxima.

Обратный оператор преобразования по начальным условиям в задаче Коши для волнового уравнения на двухслойной действительной оси вычисляет начальные условия в задаче Коши для волнового уравнения на действительной оси:

$$\mathrm{f}(x, a1, a2, k) := \mathrm{if} \quad x < 0 \quad \mathrm{then} \frac{2}{1+k} \mathrm{f}_1(a_1 x) - \frac{1-k}{1+k} \mathrm{f}_2((-a_2) x) \quad \mathrm{else} \mathrm{f}_2(a_2 x).$$

Решение задачи Коши для волнового уравнения на действительной оси $v(t, x, a_1, a_2, k)$ находим по формуле Даламбера для однослойной задачи:

$$v(t, x, a_1, a_2, k) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{f}(x + t, a_1, a_2, k) + \mathrm{f}(x - t, a_1, a_2, k)\right).$$

Прямой оператор преобразования по решению задачи Коши для действительной оси вычисляет решение задачи Коши для двухслойной действительной оси

$$u(t,x,a_1,a_2,k) := \text{if } x<0 \text{ then } \frac{1+k}{2} v\left(t,\frac{x}{a_1},a_1,a_2,k\right) + \frac{1-k}{2} v\left(t,\frac{-x}{a_1},a_1,a_2,k\right)$$

$$\text{else } v\left(t,\frac{x}{a_2},a_1,a_2,k\right).$$

В CAS вычисляем решение задачи Коши для двухслойной действительной оси для каждой из четырех частей, на которые прямые $x/a_1-t=0, x/a_1+t=0$, $x/a_2-t=0, x/a_2+t=0$ делят полуплоскость t>0, -inf<x<inf:

1. assume(x<0, x/a_1-t<0, x/a_1+t<0);

$$u_1(t,x) = \frac{f_1(x+a_1 t)+f_1(x-a_1 t)}{2}$$

2. assume(x<0, x/a_1-t<0, x/a_1+t>0);

$$u_1(t,x) = \frac{2k\,f_2\left(\frac{a_2 x + a_1 a_2 t}{a_1}\right) + (k+1) f_1(x-a_1 t) + (1-k) f_1(-x-a_1 t)}{2k+2}$$

3. assume(x>0, x/a_2-t<0, x/a_2+t>0);

$$u_2(t,x) = \frac{2 f_1\left(\frac{a_1 x - a_1 a_2 t}{a_2}\right) + (k+1) f_2(x+a_2 t) + (k-1) f_2(a_2 t - x)}{2k+2}$$

4. assume(x>0, x/a_2-t>0, x/a_2+t>0);

$$u_2(t,x) = \frac{f_2(x+a_2 t)+f_2(x-a_2 t)}{2}.$$

Векторная задача ставится аналогично скалярной, с заменой скаляров a_1, a_2, k на матрицы размера n×n, скалярных функций u_i, f_i – на вектор-функции u_i, f_i размера n×1. Векторный вариант метода операторов преобразования [3] применяется для решения векторной задачи.

Определение. Вектор-функция матричного аргумента $f_i(a_i x)$ определяется равенством

$$f_i(a_i x) = \sum_{j=1}^{n} f_{i,j}(a_i x) e_j,$$

где $f_{i,j} - j$ координата вектора f_i,

e_j – единичный вектор с j координатой, равной 1,

$f_{ij}(a_i x)$ – скалярная функция от матрицы [2].

Решение векторной задачи Коши для двухслойной действительной оси для каждой из четырех частей, на которые прямые x-t=0,x+t=0, x-t=0,x+t=0 делят полуплоскость t>0, -inf<x<inf имеет вид:

1. assume(x<0, x-t<0, x+t<0);

$$u_1(t, a_1 x) = \frac{f_1(a_1(x+t)) + f_1(a_1(x-t))}{2}$$

2. assume(x<0, x-t<0, x+t>0);

$$u_1(t, a_1 x) = (2k+2)^{-1}$$
$$\cdot\left(2k\,f_2(a_2(x+t)) + (k+1)f_1(a_1(x-t)) + (1-k)f_1(-a_1(x+t))\right)$$

3. assume(x>0, x-t<0, x+t>0);

$$u_2(t, a_2 x) = (2k+2)^{-1}$$
$$\cdot\left(2f_1(a_1(x-t)) + (k+1)f_2(a_2(x+t)) + (k-1)f_2(a_2(t-x))\right)$$

4. assume(x>0, x-t>0, x+t>0);

$$u_2(t, a_2 x) = \frac{f_2(a_2(x+t)) + f_2(a_2(x-t))}{2}.$$

В окончательных формулах следует выполнить замену $x \to a_2^{-1}x$.

Таким образом, метод операторов преобразования реализован процедурой CAS Maxima. В результате установлены формулы типа Даламбера для векторного аналога одномерного волнового уравнения на кусочно-однородной действительной оси.

Библиографический список

1. Ильин В.А. Формула типа Даламбера для продольных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности и разной упругости // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427, № 4. С. 466–468.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.

3. Баврин И.И., Матросов В.Л., Яремко О.Э. Операторы преобразования для краевых задач, интегральных представлений и восстановления зависимостей. М.: Прометей, 2016. 358 с.

Яремко Олег Эммануилович
Пензенский государственный
университет, г. Пенза, Россия
E-mail: yaremki@mail.ru

Yaremko O.E.
Penza State University,
Penza, Russia