Бутаев М.М. Расчет распределения временных интервалов между событиями мультиплексированных случайных экспоненциальных потоков. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVI Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2016. – С. 65-69.

УДК 681.322.01; 519.872.8

РАСЧЁТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

М.М. Бутаев

ANALYTICAL ESTIMATION DISTRIBUTION OF TIME INTERVALS BETWEEN EVENTS MULTIPLEXED EXPONENTIAL FLOWS

M.M. Butaev

Аннотация. Приведены аналитические функции распределения вероятности значений интервалов времени между событиями потока, полученного путём мультиплексирования потоков с экспоненциальным распределением интервалов времени между событиями.

Ключевые слова: функция распределения вероятности, интервал времени между событиями, мультиплексированный поток, погрешность аппроксимации.

Abstract. Analytical functions of allocation of probability values time intervals between events of multiplexing flows with the exponential distributions of time intervals between events are resulted.

Keywords: probability allocation function, time interval between events, multiplexer flow.

Анализ производительности информационно-вычислительных систем в научно-технической практике выполняется с помощью математического и имитационного моделирования. В системах сбора данных сообщения в узел их обработки поступают от нескольких источников. При этом потоки сообщений в узле обработки мультиплексируются (агрегируются) в один поток. На этапе разработки системы сведения о характеристиках потока событий отсутствуют. Поэтому в таких случаях используется гипотеза об экспоненциальном распределении вероятности значений интервалов времени между событиями с минимальными значениями интервалов.

Распределение полной вероятности значений интервалов времени между событиями мультиплексированного потока для различных законов распределения вероятности значений интервалов времени исходных потоков определяется выражением [1]:

$$F_R(t)=1-\alpha_R\left\{\left[1-F_1(t)\right]\int_t^{\infty}\left[1-F_2(u)\right]du+\left[1-F_2(t)\right]\int_t^{\infty}\left[1-F_1(u)\right]du\right\},$$

где $F_R(t)$ – полная вероятность распределения интервалов времени в потоке, агрегирующим первый и второй потоки; $F_1(t)$ – вероятность распределения интервалов первого потока; $F_2(t)$ – вероятность распределения интервалов во втором потоке; α_R – нормирующий множитель.

Вероятность распределения интервалов между событиями мультиплексируемого одиночного n-го экспоненциального потока ($n = 1…N$) определяется выражением:

$$F_n(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \le t < \tau_i \\ 1 - e^{-\lambda_n(t-\tau_n)},\ \tau_n \le t < \infty \end{cases},$$

где t – время между соседними событиями, τ_n – минимальное значение интервала между событиями (смещение распределения), λ_n – интенсивность n-го потока.

Для облегчения аналитических преобразований при выводе формул для нескольких мультиплексируемых потоков предлагается использовать обозначения полной вероятности и плотности вероятности, учитывающие номера и последовательность мультиплексируемых потоков. Например, обозначение $F321(t)$ обозначает формулу полной вероятности потока, мультиплексированного из трёх потоков, при этом вначале получена или используется формула для первого и второго потоков $F21(t)$, а затем получена формула для трёх потоков. В общем виде используется обозначение $F<N\ldots1>(t)$. Для обозначения компонентов формул добавляются соответствующие номера потоков после 1. Кроме того, номера потоков определяются из условия увеличения значения смещения при увеличении номера потока, номер 1 присваивается потоку с наименьшим смещением. Таким образом, нумерация потоков соответствует правилу $0 \le \tau_1 \le \tau_2 \ \ldots \le \tau_N$, где N – количество мультиплексируемых потоков.

Математическое ожидание значения интервалов между событиями n-го потока равно:

$$E_n = \tau_n + \frac{1}{\lambda_n}.$$

Для вывода аналитических зависимостей характеристик мультиплексированного потока предлагается рекуррентная формула [2]. Логика получения рекуррентной формулы вывода аналитического описания характеристик мультиплексированного потока заключается в описании характеристик N-го мультиплексированного потока через характеристики N–1-го мультиплексированного потока.

Формула рекуррентного вывода аналитических зависимостей характеристик распределения интервалов времени между событиями мультиплексированных N потоков через характеристики потоков, полученных мультиплексированием N потоков, принимает вид:

$$F\langle N\ldots1\rangle(t) = 1 - \alpha\langle N\ldots1\rangle \begin{cases} F\langle N\ldots10\rangle(t),\ 0 \le t < \tau_1 \\ \ldots \\ F\langle N\ldots1N\rangle(t),\ \tau_{N-1} \le t < \infty \end{cases}$$

$$F\langle N\ldots10\rangle(t) = 1 * \int_t^{\tau_1}\left[1 - F\langle N-1\ldots10\rangle(u)\right]du + \left[1 - F\langle N-1\ldots10\rangle(t)\right] * (E_N - t)$$

$$F\langle N\ldots1N-1\rangle(t) = 1 * \int_t^{\tau_2}\left[1 - F\langle N-1\ldots1N-2\rangle(u)\right]du + \left[1 - F\langle N-1\ldots1N-2\rangle(t)\right] * (E_N - t)$$

$$F\langle N\ldots1N\rangle(t) = e^{\lambda_n(\tau_n - t)} * \int_t^{\tau_2}\left[1 - F\langle N-1\ldots1N-1\rangle(u)\right]du + \left[1 - F\langle N-1\ldots1N-1\rangle(t)\right] * \frac{e^{\lambda_n(\tau_n - t)}}{\lambda_n}$$

Функции распределения вероятностей потока из N мультиплексируемых потоков является кусочно-непрерывной и состоит из N+1 отрезков.

Нормирующий множитель, исходя из равновесия потока мультиплексированного из N потоков, равен

$$\alpha\langle N\ldots1\rangle = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N} E_n}.$$

В результате преобразований получены функции вероятностей распределения интервалов для начальных значений N. Например, при мультиплексировании трёх потоков (N = 3):

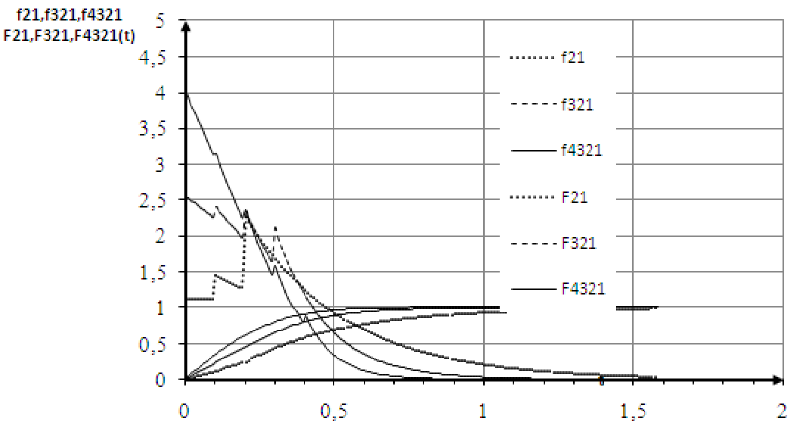
$$F321(t)=1-\frac{1}{\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_3}\right)E_1E_2E_3}\times$$
$$\times\begin{cases} E_1E_2+E_1E_3+E_2E_3-2\left(E_1+E_2+E_3\right)t+3t^2,\ t\in(0\div\tau_1] \\ E_1E_2+E_1E_3+E_2E_3-2\left(E_1+E_2+E_3\right)t+3t^2,\ t\in(\tau_1\div\tau_2] \\ e^{-\lambda_1(t-\tau_1)-\lambda_2(t-\tau_2)}\left[E_3\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)+\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}-\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)t\right],\ t\in(\tau_2\div\tau_3] \\ e^{-\lambda_1(t-\tau_1)-\lambda_2(t-\tau_2)-\lambda_3(t-\tau_3)}\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}\right),\ t\in(\tau_3\div\infty] \end{cases}$$

Соответствующая плотность вероятности:

$$f321(t)=\frac{1}{E_1E_2+E_1E_3+E_2E_3}\times$$
$$\times\begin{cases} 2\left(E_1+E_2+E_3\right)-6t,\ 0\le t<\tau_1 \\ 2\left(E_1+E_2+E_3\right)-6t,\ \tau_1\le t<\tau_2 \\ e^{\lambda_1(\tau_1-t)+\lambda_2(\tau_2-t)}\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left[E_3\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)+\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}-t\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\right)\right],\ \tau_2\le t<\tau_3 \\ e^{\lambda_1(\tau_1-t)+\lambda_2(\tau_2-t)+\lambda_3(\tau_3-t)}\frac{\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)^2}{\lambda_1\lambda_2},\ \tau_3\le t<\infty \end{cases}$$

Для больших значений N получаются громоздкие выражения, но схема их вывода сохраняется.

Графики функций полной вероятности и плотности распределения для $N\in\{2,3,4\}$ при $\tau_1 = 0{,}1$ $\lambda_1 = 1$; $\tau_2 = 0{,}2$ $\lambda_2 = 2$; $\tau_3 = 0{,}3$ $\lambda_3 = 3$; $\tau_4 = 0{,}4$ $\lambda_4 = 4$ приведены на рисунке.



Графики функций полной вероятности и плотности распределения

Полученные результаты могут быть применены при исследованиях систем сбора данных. Предложенные рекуррентные формулы вывода аналитических выражений, описывающих характеристики временных интервалов мультиплексированного потока, можно применить и для других законов распределения вероятности интервалов между событиями [2].

Библиографический список

1. Бахарева Н.Ф. Уравнения равновесия потоков в сетевых моделях на основе математических операций мультиплексирования и демультиплексирования // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки. 2009. № 4. С. 12–25.

2. Бутаев М.М., Сафронов А.Д. Характеристики распределения интервалов времени между событиями мультиплексированного потока // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2014. №4, т.12. С. 4–11.

Бутаев Михаил Матвеевич
АО «Научно-производственное предприятие «Рубин»,
г. Пенза, Россия
E-mail: nts@npp-rubin.ru

Butaev M.M.
Joint-Stock Company
«Scientific Industrial Enterprise
«Rubin», Penza, Russia