Бойков И.В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов в пространствах соболева с весовыми множителями. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVII Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2017. – С. 21-28.

УДК 519.65

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА С ВЕСОВЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

И.В. Бойков

OPTIMAL METHODS FOR APPROXIMATION OF FUNCTIONS AND CALCULATION OF INTEGRALS IN SOBOLEV SPACES WITH WEIGHTED MULTIPLES

I.V. Boikov

Аннотация. Статья посвящена построению наилучших способов приближения множеств функций, определенных в ограниченной замкнутой области Ω пространства R_l, $l = 1,2,\ldots$, конечного числа измерений, модули производных которых неограниченно возрастают при приближении к границе Γ области Ω (классы функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), B_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова этих классов функций и построены оптимальные по порядку методы аппроксимации. Рассматриваются оптимальные по порядку методы вычисления интегралов в весовых пространствах Соболева.

Ключевые слова: весовые пространства Соболева, оптимальные методы, поперечники, кубатурные формулы.

Abstract. The paper is devoted to construction of the best methods for approximating the sets of functions defined in a bounded closed region of a finite number of dimensions whose moduli of derivatives increase without bound when approach to the boundary of the domain occur (function classes). The Babenko and Kolmogorov widths of these classes of functions are calculated and optimal with respect to order approximation methods are constructed. Optimal with respect to order methods of calculation integrals in weighted Sobolev spaces are considered.

Keywords: weighted Sobolev spaces, optimal methods, widths, cubature formulas.

Теория приближения функций и теория квадратурных и кубатурных формул являются активно развивающимися областями математики, имеющими многочисленные приложения во многих областях физики, механики и техники.

Исследованиям по теории приближения и по квадратурным и кубатурным формулам посвящено большое число статей и монографий, в которых рассмотрены различные методы построения алгоритмов аппроксимации функций и вычисления интегралов.

Данная статья посвящена построению наилучших способов приближения множеств функций, определенных в ограниченной замкнутой области Ω пространства R_l, $l = 1,2,\ldots$, конечного числа измерений, модули производных которых неограниченно возрастают при приближении к границе Γ области Ω (классы функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, определенные ниже). Помимо наилучших способов приближения функций, принадлежащих множествам $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, в работе рассматриваются оптимальные по порядку алгоритмы вычисления интегралов на этих классах функций.

Оказывается, что к этим классам функций принадлежат решения эллиптических уравнений [1], слабосингулярных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений [2], [3], а также решения многочисленных задач механики, аэродинамики, электродинамики и геофизики.

Построение оптимальных методов аппроксимации функций связано с поперечниками Бабенко и Колмогорова.

Пусть B – банахово пространство, $X \subset B$ – компакт, $\Pi : X \to \bar{X}$ – представление компакта $X \subset B$ конечномерным пространством $\bar{X}$.

Определение 1. Пусть L^n – множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Выражение $d_n(X,B) = \inf_{L^n} \sup_{x\in X} \inf_{u\in L^n} \|x-u\|$, где последний $\inf$ берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет n-поперечник Колмогорова.

Определение 2. Пусть $\chi \in R^n$. Выражение $d_n(X) = \inf_{(\Pi : X\to R^n)} \sup_{x\in X} \operatorname{diam} \Pi^{-1}\Pi(x)$, где inf берется по всем непрерывным отображениям $\Pi : X \to R^n$, определяет n-поперечник Бабенко.

Приведем определения классов функций, используемые ниже.

Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \ge 1$, $\Gamma = \partial\Omega$ – граница области Ω; l, u, r – положительные целые числа; γ – положительное вещественное число; v_i – неотрицательные целые числа, $i = 1,2,\ldots,l$. Пусть $x = (x_1,\ldots,x_l)$, $v = (v_1,\ldots,v_l)$, $|v| = v_1 + \cdots + v_l$. Через D^v обозначен оператор $D^v = \partial^{|v|}/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}$.

Обозначим через $\rho_{\gamma,u}(x)$, $x \in \Omega$, весовые функции, равные $\rho_{\gamma,u}(x) = 0$ при $x \in \Gamma$, $\rho_{\gamma,u}(x) = (d(x,\Gamma))^\gamma (1 + |\ln^u d(x,\Gamma)|)^{-1}$ при $x \in \Omega \setminus \Gamma$; $\Gamma = \partial\Omega$, $d(x,\Gamma) = \min_{1\le i\le l} \min(|x_i + 1|, |1 - x_i|)$.

Определение 3. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, s, u – неотрицательные целые числа, $1 \le p \le \infty$. Функция f принадлежит весовому пространству $W_p^s(\Omega, \rho_{\gamma,u})$ Соболева с весом $\rho_{\gamma,u}(x)$, если произведение функций $(D^\alpha f(x))\rho_{\gamma,u}(x)$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l$, интегрируемо в p-й степени на Ω. Норма в $W_p^s(\Omega, \rho_{\gamma,u})$ определяется равенством

$$\|f\|_{W_p^s(\Omega,\rho_{\gamma,u})} = \left\{ \|f\rho_{\gamma,u}\|^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=s} \|(D^\alpha f)\rho_{\gamma,u}\|^p_{L_p(\Omega)} \right\}^{1/p}.$$

Здесь $D^\alpha f, \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_l), |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l, 0 \le \alpha_i \le |\alpha|$ обозначает любую обобщенную производную от f порядка s, и сумма распространяется на все такие производные;

$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\Omega \right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$, и $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{vrai} |f(x)|$.

Частными случаями пространства $W_\infty^s(\Omega, \rho_{\gamma,u})$ являются множества функций $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{B}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $B^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $0 < M = \text{const} < \infty$, $s = r + \lceil \gamma \rceil$. Приводимые ниже классы функций $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ являются обобщениями класса $Q_r(\Omega, M)$, введенного в [1].

Определение 4. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, l = 1,2,\ldots$. Функция $\varphi(x)$, $x = (x_1 \ldots, x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия:

$$\max_{x\in\Omega} |D^v \varphi(x)| \le M \text{ при } 0 \le |v| \le r;$$
$$|D^v \varphi(x)| \le M/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta}, \; x \in \Omega \setminus \Gamma, \text{ при } r < |v| \le s,$$

где $d(x,\Gamma)-$ расстояние от точки x до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле $d(x,\Gamma)=\min_{1\le i\le l}\ \min(|1+x_i|,|1-x_i|)$. Здесь $s=r+\gamma$ при γ целом, $s=r+[\gamma]+1,\ \ \gamma=[\gamma]+\mu,\ \ 0<\mu<1,\ \ \zeta=1-\mu$ при $\gamma-$ нецелом.

Определение 5. Пусть $\Omega=[-1,1]^l, l=1,2,\ldots$. Функция $\varphi(x)$, $x=(x_1\ldots,x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma,p}(\Omega,M)$, если выполнены условия:

$$\max_{x\in\Omega}|D^v\varphi(x)|\le M \text{ при } 0\le|v|\le r;$$

$$\iint_\Omega |d^{|v|-r-\zeta}(x,\Gamma)D^v\varphi(x)|^p\le M,\ x\in\Omega\setminus\Gamma, \text{при } r<|v|\le s.$$

Здесь $s=r+\gamma$ при γ целом, $s=r+[\gamma]+1,\ \ \gamma=[\gamma]+\mu,\ \ 0<\mu<1,\ \ \zeta=1-\mu$ при $\gamma-$ нецелом.

Определение 6. Пусть $\Omega=[-1,1]^l,\ \ l=1,2,\ldots;\gamma,r$ и $u-$ неотрицательные целые числа; $s=r+\gamma$. Множество $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ состоит из функций $\varphi(x)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_l)$, удовлетворяющих условиям:

$$\max_{x\in\Omega}|D^v\varphi(x)|\le M \text{ при } 0\le|v|\le r-1;$$

$$|D^v\varphi(x)|\le M(1+|\ln^u d(x,\Gamma)|),\ x\in\Omega\setminus\Gamma, \text{ при } |v|=r;$$

$$|D^v\varphi(x)|\le M(1+|\ln^{u-1}d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{|v|-r}, x\in\Omega\setminus\Gamma, \text{ при } r<|v|\le s.$$

Определение 7. Пусть $\Omega=[-1,1]^l, l=1,2,\ldots,u-$ натуральное число; $\gamma-$ нецелое число. Класс $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ состоит из функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\max_{x\in\Omega}|D^v\varphi(x)|\le M \text{ при } 0\le|v|\le r;$$

$$|D^v\varphi(x)|\le M(1+|\ln^u d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta},\ x\in\Omega\setminus\Gamma, \quad \text{при } r<|v|\le s,$$

где $s=r+[\gamma]+1, \gamma=[\gamma]+\mu,\ 0<\mu<1, \zeta=1-\mu.$

Определение 8. Пусть $\Omega=[-1,1]^l,\ l=1,2,\ldots,\ r=1,2,\ldots 0<\gamma\le1.$ Функция $f(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega,M)$, если выполнены условия $|D^v\varphi(x)|\le M^{|v|}|v|^{|v|}$ при $0\le|v|\le r$, $|D^v\varphi(x)|\le M^{|v|}|v|^{|v|}/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-1+\gamma}$ при $r<|v|\le\infty.$

Определение 9. Пусть $\Omega=[-1,1]^l,\ l=1,2,\ldots,\ r=1,2,\ldots,\gamma=1.$ Функция $f(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $\bar{B}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$, если выполнены условия $|D^v\varphi(x)|\le M^{|v|}|v|^{|v|}$ при $0\le|v|\le r-1,\ |D^v\phi(x)|\le M((1+\ln d(x,\Gamma))|$ при $|v|=r$, $|D^v\varphi(x)|\le M^{|v|}|v|^{|v|}(1+|\ln^{u-1}d(x,\Gamma)|))/(d(x,\Gamma))^{|v|-r}$ при $r<|v|\le\infty.$

Определение 10. Пусть $\Omega=[-1,1]^l,\ l=1,2,\ldots,\ r=1,2,\ldots,\gamma=1.$ Функция $f(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $B^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$, если выполнены условия $|D^v\varphi(x)|\le M^{|v|}|v|^{|v|}$ при $0\le|v|\le r$, $|D^v\varphi(x)|\le M^{|v|}|v|^{|v|}(1+|\ln^u d(x,\Gamma)|))/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta}$ при $r<|v|\le\infty.$ Здесь $s=r+[\gamma]+1,\gamma=[\gamma]+\mu,\zeta=1-\mu$.

В работах [2]–[4] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $\Omega=[-1,1]$.. Тогда $\delta_n(Q_{r\gamma}(\Omega,M))©d_n(Q_{r\gamma}(\Omega,M,C))©n^{-s}$.

Теорема 2. Пусть $\Omega=[-1,1].$ Тогда

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega,M),C)\asymp\begin{cases} n^{-s+1/p-1/q}, & 1\le p<q\le2,\\ n^{-s+1/p-1/2}, & 1\le p\le2, \quad q>2,\\ n^{-s}, & p\ge q\ge1, \quad 2<p<q.\end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $\Omega=[-1,1]^l,\ l\ge2.$ Тогда

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega,M)) \asymp d_n(Q_{r\gamma}(\Omega,M),C) \asymp \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l}, & v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Теорема 4. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Если γ натуральное число, то

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega,M),L_q) \asymp \begin{cases} n^{-r/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ (\ln n/n)^{s/l}, & v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Теорема 5. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $1 \leq p < q \leq 2$. Если γ натуральное число, то

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega,M),L_q) © \begin{cases} n^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ n^{-(s-l/p+l/q)/l}, & v < l/(l-1), \\ (\ln n/n)^{(s-l/p+l/q)/l}, & v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = (s-l/p+l/q)/(s-l/p+l/q-\gamma)$.

Теорема 6. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $p \leq 2, q > 2$. Если γ натуральное число, то

$$d_n(Q_{r\gamma p}(\Omega,M),L_p) © \begin{cases} n^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)+1/q-1/2}, & v > l/(l-1), \\ n^{-(s/l-1/p+1/2)}, & v < l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = (s-l/p+l/q)/(s-l/p+l/q-\gamma)$.

В работах [2]–[4] при доказательстве теорем 1–6 для каждого из рассматриваемых в них классов функций наряду с оценкой поперечников Колмогорова и Бабенко были построены локальные сплайны, погрешности которых совпадали по порядку с величинами поперечников Колмогорова и Бабенко. Тем самым для каждого из рассматриваемых в теоремах 1–6 классов функций построены оптимальные по порядку (по точности) методы аппроксимации.

Результаты, полученные в работах [2]–[4], были распространены на классы функций $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $\bar{B}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $B^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ [5], [6], на методы аппроксимации потенциальных полей [7].

Оптимальные методы вычисления интегралов на классах функций $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $\bar{B}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $B^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ представлены в работах [4], [8].

Работа поддержана РФФИ. Грант 16-01-00594.

Библиографический список

1. Бабенко К.И. О некоторых задачах теории приближений и числен-ного анализа // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 1. С. 3-28.

2. Бойков И.В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Пенза: Изд-во ПГУ, 2004. 316 с.

3. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2009. 252 с.

4. Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов // Оптимальные методы вычислений и их применение: межвуз. сб. науч. тр. Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1987. Вып. 8. С. 4 – 22.

5. Бойков И.В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т 38. № 1. С. 25 – 33.

6. Бойков И.В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2007. 236 с.

7. Boykov I.V. Optimal approximation and Kolmogorov widths estimates for certain singular classes related to equations of mathematical physics// arXiv. math 1303.0416

8. Бойков И.В. Поперечники Колмогорова и ненасыщаемые методы аппроксимации классов функций, определяемых решениями уравнений математической физики I. Функции многих переменных // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Физ. мат. науки. Математика. 2014. № 3. С. 5-21.

9. Бойков И.В., Бойкова А.И. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки. Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2013. 510 с.

10. Бойков И.В. Оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов в весовых пространствах Соболева // Сибирский математический журнал. 2016. № 3. С. 543–561.

Бойков Илья Владимирович
Пензенский государственный
университет, г. Пенза, Россия
E-mail: i.v.boykov@gmail.com

Boikov I.V.
Penza State University,
Penza, Russia