Монахова Э.А., Монахов О.Г. Оптимизация семейств циркулянтных сетей. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVII Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2017. – С. 32-39.

УДК 681.324:519.17

ОПТИМИЗАЦИЯ СЕМЕЙСТВ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ

Э. А. Монахова, О. Г. Монахов

OPTIMIZATION OF FAMILIES OF CIRCULANT NETWORKS

E.A. Monakhova, O.G. Monakhov

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. На основе изучения мультипликативных циркулянтов с образующими, представленными в виде степеней натурального числа, получены новые улучшенные нижние оценки достижимого числа вершин мультипликативных циркулянтных сетей размерностей 4 и 5. Построены семейства циркулянтов, достигающих найденных оценок, и найдены их аналитические описания. При этом применен эволюционный алгоритм синтеза больших циркулянтных сетей, и его параллельная версия реализована на суперкомпьютерных системах. Найдены новые циркулянтные сети, порядки которых превосходят порядки известных мультипликативных циркулянтов размерностей 4 и 5 и диаметров от 6 до 80. Мультипликативные циркулянтные сети имеют простые алгоритмы парного и трансляционного обменов, эффективны относительно трассировки интегральных схем, живучести и отказоустойчивости.

Ключевые слова: оптимизация, циркулянтные сети, эволюционный алгоритм

Abstract. We consider the problem of optimizing circulant networks, which consists in maximizing the number of vertices for a given degree and the diameter of the graph. Based on the study of multiplicative circulants with generators represented in the form of powers of the natural number, new improved lower bounds for the achievable number of vertices of multiplicative circulant networks of dimensions 4 and 5 are obtained. Families of circulants reaching the estimates are constructed and their analytic descriptions are found. In this case, an evolutionary algorithm for the synthesis of large circulant networks is applied, and its parallel version is implemented on supercomputer systems. New circulant networks are found whose orders exceed the orders of the known multiplicative circulants of dimensions 4 and 5 and diameters from 6 to 80. Multiplicative circulant networks have simple algorithms for pair and translational exchanges, are effective with respect to the trace of integrated circuits, survivability and fault tolerance.

Keywords: optimization, circulant networks, evolutionary algorithm**.**

1. Введение и основные определения

Пусть $s_1, s_2, ..., s_k, n$ – целые числа такие, что $1 \le s_1 < s_2 < ... < s_k < n$. Граф C с множеством вершин $V = \{0,1,...,n-1\}$ и множеством ребер $E = \{(i, j): i - j \equiv s_l \bmod n, l = \overline{1,k}\}$, называется *циркулянтным*, числа $S = (s_1, s_2, ..., s_k)$ – образующими, $(n; S)$ – его параметрическим описанием, k – размерностью, n – порядком графа.

Циркулянтные сети (графы) широко изучаются при проектировании и анализе вычислительных систем, в теории графов и дискретной математике, в качестве топологии для мультипроцессорных систем и компьютерных сетей и для других применений, см. обзоры [1,2,3]. Циркулянтные сети вида $C(n;1,t,t^2,...,t^{k-1})$ с образующими, представленными в виде степеней натурального числа $t \ge 2$, называются *мультипликативными* циркулянтами.

Диаметром графа G называется $d(G)=\max_{i,j\in V} d(i,j)$, где $d(i,j)$ – длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G. Для любых натуральных d и k пусть $M(d,k)$ обозначает максимально возможное (достижимое) натуральное n такое, что существует множество образующих $S=(1,s_2,...,s_k)$, при котором $d(C(n;S))\le d$. В [1] можно найти обзор результатов по оценкам диаметра и достижимого порядка *k*-мерных, $k\ge 2$, циркулянтных сетей.

Приведем известные результаты, касающиеся оценок диаметра и достижимого порядка k-мерных, $k\ge 2$, циркулянтных сетей.

В [4] показано, что

$$M(d,k)\le 1+\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i C_d^{k-i} 2^{k-i},$$

получена нижняя граница диаметра для любых n и k порядка $\frac{1}{2}(k!)^{1/k} n^{1/k}$ и доказана

Теорема 1. Циркулянтные сети вида $C(t^k;1,t,t^2,...,t^{k-1})$, где $t\ge 3$ – нечетное число, имеют диаметр $d=k\left\lfloor \frac{t}{2}\right\rfloor$.

Для $k=2$ задача построения семейств двумерных циркулянтов с единичной образующей и максимально возможным порядком при любом диаметре d, решена (см. обзор в [1]). Также найдена [5,6] функция $M(d,k)$ для $k=3$ и любого диаметра d и построены семейства трехмерных циркулянтов с порядком, совпадающим с $M(d,3)$. Для $k=4$ хорошие оценки функции $M(d,4)$ аналитически найдены в [7] и улучшены с помощью компьютерного поиска в [8]. В [9,10] авторы представили таблицу, содержащую свод самых больших известных циркулянтных сетей, найденных в литературе для ряда значений степеней и диаметров. Таблица рекордных циркулянтов включает в том числе вышеперечисленные аналитические результаты для размерностей 2, 3 и 4. В настоящее время таблица рекордных циркулянтных сетей для $k\le 8$ и $d\le 10$ представлена в Интернете [11] и постоянно обновляется.

Изучение мультипликативных циркулянтов, начатое в работе [4], продолжалось в последующие годы. Результаты теоремы 1 улучшены в [12]:

Теорема 2. Пусть d и k – натуральные числа и $d\ge k\ge 3$ и пусть $p=\lfloor (d-k+3)/k\rfloor$, тогда

$$M(d,k)\ge n=2p\sum_{i=0}^{k-1}(4p)^i=\frac{1}{2}(\frac{4}{k})^k d^k+\mathrm{O}(d^{k-1}).$$

В [13,14] рассмотрены свойства мультипликативных циркулянтных сетей вида $C(n;1,t,...,t^{k-1})$ с нечетным $t\ge 3$ и $2t^{k-1}<n\le t^k$ и получена общая формула для верхней оценки диаметра

$$d(n;1,t,t^2,...,t^{k-1})\le (k-1)\left\lfloor \frac{t}{2}\right\rfloor+\left\lceil (n-t^{k-1})/(2t^{k-1})\right\rceil.$$

В [15] исследовались свойства мультипликативных циркулянтов вида $C(t^k;1,t,...,t^{k-1})$ с четным $t\ge 2$ и получен их диаметр:

$$d(t^k;1,t,t^2,...,t^{k-1})=k\frac{t}{2}-\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor.$$

Показано также, что мультипликативные циркулянтные сети как графы с образующими, представленными в виде степеней целого числа, имеют простые алгоритмы парного [13,15] и трансляционного обменов [15], эффективны относительно трассировки интегральных схем, живучести и отказоустойчивости [13,14].

В [16] получены новые улучшенные оценки для $M(d,k)$:

Теорема 3. Пусть $p=\left\lfloor \frac{d-\lfloor k/4\rfloor}{k}\right\rfloor$, где d и $k>4$ – целые числа такие, что $d \ge k+\left\lfloor \frac{k}{4}\right\rfloor$. Тогда

$$M(d,k)\ge n=\begin{cases} 2p\sum_{i=0}^{k-1}(4p)^i, \text{ если } kp+\left\lfloor \frac{k}{4}\right\rfloor \le d < kp+\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor, \\ (2p+1)\sum_{i=0}^{k-1}(4p+1)^i, \text{ если } kp+\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor \le d < k(p+1), \\ (2p+2)\sum_{i=0}^{k-1}(4p+3)^i, \text{ если } k(p+1)\le d < k(p+1)+\left\lfloor \frac{k}{4}\right\rfloor. \end{cases}$$

В настоящей работе продолжено исследование оценок диаметра циркулянтных сетей и нижних оценок экстремальной функции $M(d,k)$ при $k=4$ и $k=5$. На основе изучения циркулянтов с образующими, представленными в виде степеней числа $t\ge 2$, получены новые нижние оценки достижимого числа вершин циркулянтных сетей размерностей $k=4$ и $k=5$ и построены соответствующие семейства мультипликативных циркулянтов, реализующих эти оценки.

2. Новые результаты

Для мультипликативных циркулянтов размерности 4 были проведены дальнейшие исследования сетей, рассмотренных в работах [4,15]. Исследовались диапазоны их существования и определялось максимальное значение порядка графа, при котором значения диаметров и образующих совпадают с найденными в [4,15]. В табл. 1 приведены значения найденных максимально возможных порядков графов (обозначены через n^*). Полученные результаты значительно (на $O(3d^4/32)$) превосходят порядки графов, рассмотренных в [4,15], при тех же диаметрах d. В табл. 1 представлены также новые мультипликативные циркулянтные сети размерности 5. Эти сети были найдены с использованием компьютерного поиска, что позволило улучшить порядки графов по сравнению с известными результатами [2,4,12,15,16], при этом максимальное увеличение порядков по сравнению с графами из [2,16] составляет $O((4d/5)^3(4d/5-4))$.

В табл. 1 приведены значения диаметров d найденных графов, их порядков n, а также параметров t, порождающих соответствующие множества образующих графа.

Таблица 1

Новые циркулянтные графы размерностей 4 и 5

$k=4$			$k=5$					
d	$n=n^*$	t	d	n	t	d	n	t
4	107	3	6	682	4	20	484553	15
8	1093	5	7	2343	5	21	563592	16
12	4687	7	8	4399	7	22	798669	17
16	13577	9	9	8803	7	23	984647	19
20	31411	11	10	13605	7	24	1245289	19
24	62797	13	11	22820	8	25	1505931	19
28	113303	15	12	36905	9	26	1692610	20
6	426	4	13	52707	11	27	2246255	21
10	2325	6	14	81989	11	28	2671209	23
14	8036	8	15	111271	11	29	3230891	23
18	20655	10	16	137598	12	30	3790573	23
22	44286	12	17	216587	13	31	4168812	24
26	83993	14	18	282053	15	32	5289713	25
30	145800	16	19	383303	15	33	6132011	27

На основе анализа данных из табл. 1 и используя алгоритм эволюционного синтеза с соответствующей настройкой темплейтов (см. [17]) были найдены аналитические описания семейств полученных графов размерностей 4 и 5. Их порядки и диаметры оказались представимы в виде полиномов от t, результаты приводятся в табл. 2. Существование найденных семейств графов проверено с помощью специально разработанной компьютерной программы для значений $n < 333 \cdot 10^6$ при $k = 4$ и $k = 5$. Для этого использовалась параллельная программа с библиотекой OpenMP. Другая особенность полученных семейств – порядки графов являются максимально возможными для исследуемых типов образующих, что было показано при значениях диаметров $d \le 30$ при $k = 4$ и $k = 5$. Доказательства существования полученных семейств и максимальности их порядков при любых диаметрах являются предметом дальнейшей работы.

Таблица 2

Аналитические описания новых семейств циркулянтов размерностей 4 и 5

$d \pmod 4$	n (при $k = 4$)	d	t (при $S = (1, t, t^2, t^3)$)
0	$\frac{5t^4}{2} - 4t^3 + t^2 + t + \frac{1}{2}$	$2(t-1)$	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
2	$\frac{5t^4}{2} - \frac{9t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2}$	$2(t-1)$	6, 8, 10, 12, 14, 16
$d \pmod 5$	n (при $k = 5$)	d	t (при $S = (1, t, t^2, t^3, t^4)$)
0	$\frac{t^5}{2} + 2t^4 + t^3 + t^2 + t + \frac{1}{2}$	$\frac{5t+5}{4}$	7, 11, 15, 19, 23
1	$\frac{t^5}{2} + \frac{t^4}{2} + \frac{3t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2}$	$\frac{5t+4}{4}$	12, 16, 20, 24
2	$\frac{t^5}{2} + t^4 + t^3 + t^2 + t + \frac{1}{2}$	$\frac{5t+3}{4}$	5, 9, 13, 17, 21, 25
3	$\frac{t^5}{2} - 2t^4 + t^3 + t^2 + t + \frac{1}{2}$	$\frac{5t-3}{4}$	11, 15, 19, 23, 27
4	$\frac{t^5}{2} + t^3 + t^2 + t + \frac{1}{2}$	$\frac{5t+1}{4}$	7, 11, 15, 19, 23

Рассмотрим пример. Пусть $k = 5$, тогда в силу теоремы 2

$$M(d,5) \ge 135726 \text{ при } d = 21, \quad M(d,5) \ge 559240 \text{ при } 22 \le d \le 26 .$$

Теорема 3 дает следующие оценки:

$$M(d,5) \ge n = \begin{cases} 559240 \text{ при } d = 21, \\ 798669 \text{ при } 22 \le d \le 24, \\ 1375610 \text{ при } d = 25, \\ 1684210 \text{ при } d = 26. \end{cases}$$

Новые найденные сети при тех же диаметрах имеют следующие порядки

$$n = \begin{cases} 563592 \text{ при } d = 21, \\ 798669 \text{ при } d = 22, \\ 984647 \text{ при } d = 23, \\ 1245289 \text{ при } d = 24, \\ 1505931 \text{ при } d = 25, \\ 1692610 \text{ при } d = 26. \end{cases}$$

Указанные выше значения n и нижние границы d достигаются при образующих $S = (1, t, t^2, t^3, t^4)$, где значения t равны соответственно 16, 17, 19, 19, 19 и 20.

Библиографический список

1. Монахова Э.А. Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 3. С. 92-115.

2. Monakhova E.A. A Survey on Undirected Circulant Graphs // Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 4(1) (2012), 1250002 (30 pages).

3. Perez-Roses H. Algebraic and Computer-Based Methods in the Undirected Degree/Diameter Problem – A Bief Survey// Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 2(2) (2014), 166–190.

4. Wong C.K. and Don Coppersmith. A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach., 21 (1974), 392–402.

5. Monakhova E., Optimal Triple Loop Networks with Given Transmission Delay: Topological Design and Routing // Inter. Network Optimization Conference, (INOC'2003), Evry/Paris, France, (2003), 410–415.

6. Dougherty R., Faber V. The degree-diameter problem for several varieties of Cayley Graphs, 1: The Abelian Case// SIAM J. Discrete Math., 17(3) (2004), 478–519.

7. Монахова Э.А. Оптимизация циркулянтных сетей связи размерности четыре // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15, N. 3. С. 58-64.

8. Lewis R. The degree-diameter problem for circulant graphs of degree 8 and 9// arXiv:1404.3948v1, (2014).

9. Feria-Puron R., Ryan J., Perez-Roses H., Searching for Large Multi-Loop Networks// Elec. Notes Disc. Math., 46 (2014), 233–240.

10. Feria-Puron R., Perez-Roses H., Ryan J. Searching for Large Circulant Graphs// arXiv:1503.07357v1 [math.CO] (25 Mar 2015), P. 31.

11. The Degree / Diameter Problem For Circulant Graphs http://combinatoricswiki.org/wiki/The_Degree_Diameter_Problem_for_Circulant_Graphs.

12. Chen S., and Jia X.-D., Undirected loop networks // Networks, 23 (1993), 257–260.

13. Parhami B. Chordal Rings Based on Symmetric Odd-Radix Number Systems // Proc. of Inter. Conf. on Communications in Computing (Las Vegas, NV, June 27-30). Los Alamitos: IEEE Press, 2005. P. 196–199.

14. Parhami B. A Class of Odd-Radix Chordal Ring Networks // The CS'J Journal on Computer Science and Engineering. 2006. Vol. 4, N. 2 – 4. P. 1–9.

15. Stojmenovic I. Multiplicative circulant networks. Topological properties and communication algorithms // Discrete Applied Math. 1997. Vol. 77. P. 281–305.

16. Monakhova E.A., On an Extremal Family of Circulant Networks// Journal of Applied and Industrial Mathematics, 5 (4) (2011), 1–7.

17. Монахова Э.А., Монахов О.Г. Поиск рекордных циркулянтных графов с использованием параллельного генетического алгоритма // Дискретный анализ и исследование операций. Т. 22, № 6, 2015. С. 29-39.

Монахова Эмилия Анатольевна
Институт вычислительной
математики и математической
геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: emilia@rav.sscc.ru

Monakhova E.A.
Institute of Computational
Mathematics and Mathematical
Geophysics, Novosibirsk, Russia

Монахов Олег Геннадьевич
Институт вычислительной
математики и математической
геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: monakhov@rav.sscc.ru

Monakhov O.G.
Institute of Computational
Mathematics and Mathematical
Geophysics, Novosibirsk, Russia