Яремко О.Э., Яремко Н.Н. Метод радиально базисных функций для гауссовой фильтрации сигналов и его реализация в MATLAB. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVII Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2017. – С. 69-73.

УДК 519.632.4

МЕТОД РАДИАЛЬНО БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ГАУССОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В MATLAB

О.Э. Яремко, Н.Н. Яремко

RADIAL BASIS FUNCTIONS METHOD FOR GAUSS' FILTERING OF SIGNALS AND ITS IMPLEMENTATION IN MATLAB

O.E. Yaremko, N.N. Yaremko

Аннотация. Получен новый алгоритм для гауссовой фильтрации сигнала. Алгоритм основан на методе радиально базисных функций. Установлено, что в разложении фильтрованного сигнала в сумму взвешенных гауссиан веса и центры гауссиан такие же, как у нефильтрованного сигнала, а ширина окна увеличивается на σ – величину шума, имеющегося в исходном сигнале. Метод реализован в приложении Curve Fitting Toolbox из MATLAB.

Ключевые слова: радиально-базисные функции, преобразование Вейерштрасса, Гауссова фильтрация, РБФ-аппроксимация.

Abstract. A new algorithm for Gaussian filtering of the signal is obtained. The algorithm is based on the method of radially basic functions. It is established that in the decomposition of the filtered signal into the sum of weighted Gaussian weights and Gaussian centers are the same as for the non-filtered signal, and the width of the window increases by σ-the amount of noise presented in the original signal. The method is implemented in the application of the Curve Fitting Toolbox from MATLAB.

Keywords: radial basis functions, Weierstrass transformation, Gauss' filtering, RBF-approximation.

В математике преобразование Вейерштрасса [1] функции $f: R \to R$, названное в честь Карла Вейерштрасса, есть "приглаженный" вариант $f(x)$, полученный путем усреднения значений f, взвешенных с Гауссовым ядром с центром в точке x.

В частности, функция Ф определена формулой

$$W[f](x) \equiv F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right) f(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

В электронике и обработке сигналов большое значение имеет Гауссовский фильтр. Гауссовский фильтр – это фильтр, чья импульсная характеристика является функцией Гаусса. Математически Гауссовский фильтр изменяет значение входного сигнала путем свертки с функцией Гаусса

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right).$$

В итоге создается эффект размытия по Гауссу.

Фильтр Гаусса (Gaussian filter) обычно используется в цифровом виде для обработки двумерных сигналов (изображений) с целью снижения уровня шума.

Двумерное интегральное преобразование Вейерштрасса имеет вид

$$W[f](x,y) \equiv F(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 2\pi} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2\sigma^2}\right) f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что двумерное преобразование Вейерштрасса сводится к последовательному использованию одномерных преобразований по обеим переменным. Таким образом, достаточно уметь вычислять одномерное преобразование Вейерштрасса.

Будем использовать метод RBNN [1]. Пусть аппроксимация сигнала $f(x,y)$ взвешенными суммами двумерных гауссиан имеет вид

$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{N} w_k \frac{1}{\sigma_k^2 2\pi}\exp\left(-\frac{(x-\xi_k)^2+(y-\eta_k)^2}{2\sigma_k^2}\right),$$

где (ξ_k,η_k) – центры гауссиан, σ_k – ширина окна, w_k – веса, тогда преобразование Вейерштрасса находится по формуле

$$F(x,y)=\sum_{k=1}^{N} w_k \frac{1}{(\sigma+\sigma_k)^2 2\pi}\exp\left(-\frac{(x-\xi_k)^2+(y-\eta_k)^2}{2(\sigma+\sigma_k)^2}\right).$$

Таким образом, применение фильтра Гаусса приводит к той же формуле, что и вычисления аппроксимации сигнала, но с увеличением ширины окна на величину σ.

Пусть теперь известна аппроксимация фильтра Гаусса, соответствующая ширине фильтра σ

$$F(x,y)=\sum_{k=1}^{N} w_k \frac{1}{\sigma_k{}^2 2\pi}\exp\left(-\frac{(x-\xi_k)^2+(y-\eta_k)^2}{2\sigma_k{}^2}\right),$$

и нужно восстановить исходный сигнал $f(x,y)$. Если подбирать аппроксимацию фильтра Гаусса с ограничением на ширину окна каждого из нейронов более чем σ, тогда аппроксимация сигнала гауссианами имеет вид

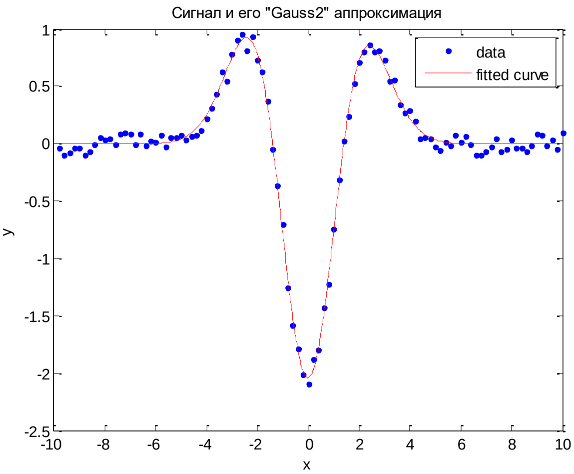
$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{N} w_k \frac{1}{(\sigma_k-\sigma)^2 2\pi}\exp\left(-\frac{(x-\xi_k)^2+(y-\eta_k)^2}{2(\sigma_k-\sigma)^2}\right).$$

Таким образом, вычисление сигнала проводится по той же формуле, что и вычисления аппроксимации фильтра Гаусса, но с уменьшением ширины окна на величину σ. Регуляризация процесса восстановления происходит автоматически, при удовлетворении ограничений на ширину окна гауссиан.

Настройка весовых векторных коэффициентов, центра и ширины окна каждой из обратных квадрик для прямой и обратной задач осуществляется методом наименьших квадратов. Могут быть использованы методы отжига, градиентный, генетический алгоритм, метод сопряженных градиентов, EM метод, RBFNN [1].

Один из вариантов нахождения аппроксимации сигнала состоит в использовании приложением **Curve Fitting Toolbox** из **Matlab.**

```
x = (-10:0.2:10)';
% Задаем исходный сигнал со случайной помехой ±0.01
gdata = exp(-x.^2/4).*(x.^2-2)+0.2*(rand(size(x))-.5);
% Указываем тип аппроксимации и число гауссиан
f = fittype('gauss2');
gfit = fit(x,gdata,f,'StartPoint',[-1 -1 1 1 0 1])
figure
plot(gfit,x,gdata)
hold
title('Сигнал и его "Gauss2" аппроксимация');
```



% выводим параметры аппроксимации

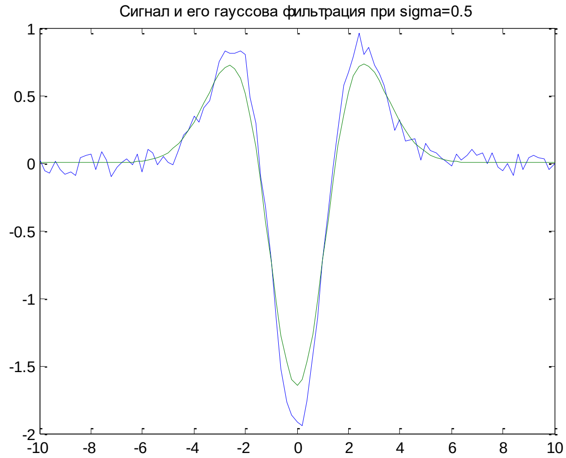
a1=gfit.a1 b1=gfit.b1 c1=gfit.c1 a2=gfit.a2 b2=gfit.b2 c2=gfit.c2

% исходный сигнал

signal= exp(-x.^2/4).*(x.^2-2);

Gaussian filtering=a1*c1*(0.5+c1^2)^(-1/2)*exp(-(x-b1).^2/(0.5+c1^2))+ a2*c2*(0.5+c2^2)^(-1/2)*exp(-(x-b2).^2/(0.5+c2^2));

plot(x,[gdata,uaprocsim]);



Библиографический список

1. Горбаченко В.И., Жуков М.В. Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017, том 57. № 1. С. 133–143.

2. Горбань А.Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // Сибирский журнал вычислительной математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 12–24.

Яремко Олег Эмануилович
Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
E-mail: yaremki@mail.ru

Yaremko O.E.
Penza State University, Penza,Russia

Яремко Наталия Николаевна
Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
E-mail: yaremki@yandex.ru

Yaremko N.N.
Penza State University, Penza,Russia