

Трофимова С.А., Иткина Н.Б. Особенности построения дискретного аналога смешанной вариационной постановки задачи Дарси. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVIII Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2018. – С. 16-22.

УДК 519.632

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА СМЕШАННОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ДАРСИ

С.А. Трофимова, Н.Б. Иткина

CONSTRUCTION PECULIARITIES OF THE DISCRETE ANALOGUE OF THE MIXED VARIATIONAL FORMULATION OF THE DARCY PROBLEM

S.A. Trofimova, N.B. Itkina

Аннотация. В работе рассматривается смешанная вариационная постановка на базе разрывного метода Галёркина для решения задачи Дарси. Выполняется построение иерархической базисной системы в пространстве H^{div} для скорости и разрывного базиса в пространстве L_2 для давления. Анализируются особенности дискретного аналога, полученного в результате конечно-элементной аппроксимации.

Ключевые слова: задача Дарси, смешанная постановка, разрывный метод Галёркина, дискретный аналог.

Abstract. A mixed variational formulation based on a discontinuous Galerkin method for solving the Darcy problem is considered. The construction of hierarchical basis system in H^{div} space for velocity and discontinuous basis in L_2 space for pressure is carried out. Construction peculiarities of the discrete analogue obtained as a result of finite element approximation are analyzed.

Keywords: Darcy problem, mixed formulation, discontinuous Galerkin method, discrete analogue.

Введение

В рамках теории фильтрации рассматривается движение жидкостей (газов) через пористые среды. Значительная часть мировых нефтяных и газовых месторождений имеет слоисто-пористую структуру. Накопление углеводородов в этих пористых пластах-коллекторах, а также основные технологии извлечения (добычи) управляются законами теории фильтрации. Таким образом, математическое моделирование процессов просачивания жидкости (газа) в пористую среду – это актуальная задача для нефтегазовой промышленности и многих других отраслей экономики. Модель Дарси достаточно точно позволяет описать движение жидкости в пористой среде под действием давления [1].

Основная идея смешанного метода заключается в нахождении как первичной, так и дуальной переменной, при этом осуществляется поиск критической точки соответствующего функционала над конечно-элементным пространством допустимых пробных функций, которое представимо в виде прямой суммы двух или более подпространств [2,3].

Для получения дискретного аналога в работе используется разрывный метод Галёркина (DG-метод) [4]. Основная идея DG-метода заключается в локальной аппроксимации решения на каждом конечном элементе. На межэлементных границах решение определяется при помощи специальных операторов следа функций. Основным недостатком DG-метода является возрастание количества степеней свободы. Проблемы, связанные с увеличением размерности системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (ухудшение обусловленности и изме-

нение структуры матрицы СЛАУ), могут быть разрешены при помощи построения специализированных решателей и иерархических базисных систем.

1. Смешанная постановка на базе разрывного метода Галёркина

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная n -мерная область с границей $\partial\Omega = \Gamma_D$, задача Дарси описывается системой:

$$\begin{cases} u = -K\nabla p & \text{в } \Omega \\ \nabla \cdot u = f & \text{в } \Omega, \\ u \cdot n = g & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

где K – симметричный положительно определенный тензор, p – давление, u – скорость.

Введем бесконечномерное пространство Лебега $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(v, w)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} v w d\Omega$ и нормой $\|v\|_{L_2(\Omega)} = (v, v)_{L_2(\Omega)}^{1/2}$ и пространство векторных функций:

$$H^{div}(\Omega) = \{v \in (L_2(\Omega))^n, \nabla \cdot v \in L_2(\Omega)\}$$

Пусть $\Xi_h = \{T\}$ – разбиение расчетной области Ω на конечные элементы T .

Тогда $\Gamma = \bigcup_T \partial T$ – множество границ элементов T , $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$. Введем конечно-элементные подпространства следующим образом:

$$V_h = \{v \in (L_2(\Omega))^n : v|_T \in (P_k(T))^n \forall T \in \Xi_h\}, \quad (2)$$

$$Q_h = \{q \in L_2(\Omega) : q|_T \in P_l(T) \forall T \in \Xi_h\}, \quad (3)$$

где $P_{k,l}(T)$ – пространства полиномов степени $k \geq 1$ и $l \geq 1$ соответственно, определенных на элементе T .

Следуя подходу, описанному в [3], получим смешанную вариационную постановку на базе разрывного метода Галёркина с дополнительным штрафом на скачки давления p и скорости u : найти $(u, p) \in V_h \times Q_h$ такие, что:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} K^{-1} u \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_0} [p] \{v\} dS + \int_{\Gamma_D} (pn) \cdot v dS - \\ - \theta \int_{\Omega} (K^{-1} u + \nabla p) \cdot v d\Omega = 0, \quad \forall v \in V_h \\ - \int_{\Omega} \nabla \cdot u q d\Omega + \int_{\Gamma_0} \{u\} [q] dS + \int_{\Gamma_D} u \cdot (qn) dS + \delta \theta \int_{\Omega} (u + K \nabla p) \cdot \nabla q d\Omega =, \\ = \int_{\Omega} f q d\Omega - \int_{\Gamma_D} g q dS, \quad \forall q \in Q_h \end{cases} \quad (4)$$

где θ – выбираемый параметр, $\delta = \pm 1$.

2. Построение иерархических базисных систем в пространствах H^{div} и L_2

Рассмотрим один из способов построения иерархического конформного базиса в пространстве H^{div} . Конформность подразумевает требование непрерывности нормальных компонент базисных функций на межэлементных границах. Базисные функции будем строить как результат тензорного произведения ортогональных полиномов Лежандра, заданных на данном носителе, само пространство при этом представляется в виде суммы двух подпространств: подпространства ди-

вергентно свободных функций и подпространств не дивергентно свободных функций [5].

$$\text{Диаграмма DeRham'a: } H^1 \xrightarrow{\nabla} H^{curl} \xrightarrow{\nabla \times} H^{div} \xrightarrow{\nabla \cdot} L^2.$$

Рассмотрим конечный элемент $T_{quad}^{div} = (T_{quad}, V_{quad}, \Sigma_{quad}^{div})$, где T_{quad} – прямоугольная область $T_{quad} = \{\xi \in \square^2; -1 < \xi_1, \xi_2 < 1\}$.

Диаграмма DeRham'a предполагает, что конечный элемент T_{quad}^{div} будет оснащен полиномиальным пространством:

$$V_{quad} = \left\{ v \in \mathcal{Q}_{p^{b,1}+1, p^{b,2}} \times \mathcal{Q}_{p^{b,1}, p^{b,2}+1}, v \cdot n|_{e_j} \in P_{p^{e_j}}(e_j), j = \overline{1,4} \right\}, \quad (5)$$

где $p^{b,1}$, $p^{b,2}$ – степени полиномов для bubble-функций, p^{e_j} – степени полиномов для edge-функций. Множество степеней свободы Σ_{quad}^{div} однозначно определяется выбором базиса в пространстве V_{quad} .

Будем формировать базисные функции двух типов: дивергентно свободные edge-функции высокого порядка и недивергентно свободные базисные функции высокого порядка, определенные во внутренних узлах конечного элемента (bubble-функции).

Следы нормальных компонент edge-функций $\gamma_k^{e_i}$ связаны с полиномами Лежандра L_k степени $k = 0, 1, \dots, p^{e_i}$ на ребре e_i , $i = \overline{1,4}$ и равны нулю на остальных ребрах.

$$\gamma_k^{e_1} = l_0(\xi_1) L_k(\xi_2) \tau_1, 0 \leq k \leq p^{e_1} \quad (6)$$

$$\gamma_k^{e_2} = l_1(\xi_1) L_k(\xi_2) \tau_1, 0 \leq k \leq p^{e_2} \quad (7)$$

$$\gamma_k^{e_3} = L_k(\xi_1) l_0(\xi_2) \tau_2, 0 \leq k \leq p^{e_3} \quad (8)$$

$$\gamma_k^{e_4} = L_k(\xi_1) l_1(\xi_2) \tau_2, 0 \leq k \leq p^{e_4}, \quad (9)$$

где $\tau_1 = (1, 0)$ и $\tau_2 = (0, 1)$ – направления, $l_0(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$, $l_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$.

Bubble-функции строятся таким образом, что их нормальные компоненты равны нулю на всех ребрах:

$$\gamma_{k_1, k_2}^{b,1} = l_{k_1}(\xi_1) L_{k_2}(\xi_2) \tau_1, 2 \leq k_1 \leq p^{b,1} + 1, 0 \leq k_2 \leq p^{b,2} \quad (10)$$

$$\gamma_{k_1, k_2}^{b,2} = L_{k_1}(\xi_1) l_{k_2}(\xi_2) \tau_2, 0 \leq k_1 \leq p^{b,1}, 2 \leq k_2 \leq p^{b,2} + 1. \quad (11)$$

Перейдем к построению базиса для давления в пространстве L_2 . Для построения одномерного базиса введем две разрывные функции и дополним одной непрерывной функцией. Квадратичные базисные функции для одномерного случая определяются формулами [6]:

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1)(1 - 3\xi),$$

$$\psi_2(\xi) = -2\xi^2 + 2\xi,$$

$$\psi_3(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 2\xi).$$

Двумерные биквадратичные базисные функции получаем в результате тензорного произведения одномерных квадратичных базисных функций.

2. Дискретный аналог вариационной формулировки

Определим искомые скорость и давление в виде разложения по базисным функциям из подпространств (2) – (3) соответственно:

$$u = \sum_{i=1}^{N^u} q_i^u \psi_i^u, \quad \psi_i^u \in V_h, \quad (12)$$

$$p = \sum_{i=1}^{N^p} q_i^p \psi_i^p, \quad \psi_i^p \in Q_h. \quad (13)$$

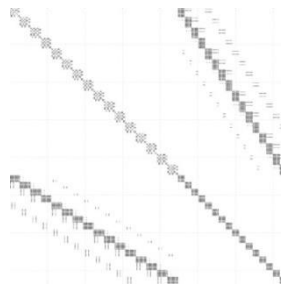
Подставив (12) – (13) в (4), получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\tilde{A}\tilde{q} = \tilde{f} \quad (14)$$

с матрицей, имеющей блочную структуру:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^u \\ q^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Реализация различных стратегий нумерации конечных элементов и степеней свободы позволяет получить матрицу СЛАУ определенной структуры. Учитывая специфику формирования матрицы дискретного аналога разрывного метода Галёркина, используем нумерацию, которая позволит получить структуру матрицы с минимальным количеством внедиагональных ненулевых элементов. На рисунке показан портрет матрицы, сформированной на 16 прямоугольных конечных элементах с использованием иерархического базиса для скорости (6) – (11) и базиса для давления из пространства L_2 .



Портрет матрицы СЛАУ

Заключение

Построена вычислительная схема смешанной постановки на базе разрывного метода Галеркина для решения задачи Дарси с тензорным коэффициентом проницаемости среды. Проведена верификация программного комплекса на классе задач с гладким аналитическим решением.

Сконструированы базисные системы из пространства H^{div} для скорости и базис для давления из пространства L_2 . Исследование базисной системы для скорости показало, что включение bubble-функций в структуру иерархического базиса позволяет в среднем уменьшить относительную погрешность вычислений в два раза и повысить гладкость получаемого решения, а также уменьшить количество итераций при решении системы линейных алгебраических уравнений.

Библиографический список

1. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации: учебное пособие. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. 88 с.
2. Arnold D.N. Mixed finite element methods for elliptic problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1990. No. 82. P. 281-300.
3. Brezzi F., Hughes T.J.R., Marini L.D., Masud A. Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow // *Journal of Scientific Computing*. 2005. Vol. 22, No. 1. P. 119-225.
4. Arnold D.N., Brezzi F., Marini L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. // *SIAM J. Numer. Anal.* 2002. Vol. 39, No. 5. P. 1749-1779.
5. Solin P., Segeth K., Dolezel I. High-order finite element methods. Chapman and Hall / CRC. 2004. 388 p.
6. Шокин Ю.И., Шурина Э.П., Иткина Н.Б. Современные многосеточные методы: Часть I. Многомасштабные методы: учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. 68 с.

Трофимова Светлана Алексеевна
Новосибирский государственный
технический университет,
Институт нефтегазовой
геологии и геофизики
им. А.А. Трофимука СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

Trofimova S.A.
Novosibirsk State
Technical University,
Trofimuk Institute of Petroleum
Geology and Geophysics SB
RAS, Novosibirsk, Russia

Иткина Наталья Борисовна
Новосибирский государственный
технический университет,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: itkina.nat@yandex.ru

Itkina N.B.
Novosibirsk State Technical
University, Novosibirsk, Russia