Монахова Э.А., Монахов О.Г. Улечшение структуры показателей семейств мультипликативных циркулярных сетей. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVIII Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2018. – С. 22-28.

УДК 681.324:519.17

УЛУЧШЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СЕМЕЙСТВ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ[1]

Э.А. Монахова, О.Г. Монахов

IMPROVING THE STRUCTURAL INDICATORS OF THE FAMILIES OF MULTIPLICATIVE CIRCULANT NETWORKS

E.A. Monakhova, O.G. Monakhov

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. На основе изучения мультипликативных циркулянтов с образующими, представленными в виде степеней натуральных чисел, кратных четырем, получены новые улучшенные нижние оценки достижимого числа вершин мультипликативных циркулянтных сетей размерностей 4, 5 и 6. Даны аналитические описания семейств циркулянтов, достигающих найденных оценок. При этом использован алгоритм синтеза больших циркулянтных сетей, и его параллельная версия реализована на суперкомпьютерных системах. Порядки новых циркулянтных сетей существенно превосходят порядки известных мультипликативных циркулянтов размерностей 4, 5 и 6 и диаметров от 6 до 41.

Ключевые слова: оптимизация, циркулянтные сети, алгоритм синтеза.

Abstract. We consider the problem of optimizing circulant networks, which consists in maximizing the number of vertices for a given degree and the diameter of the graph. On the basis of the study of multiplicative circulants with generators represented in the form of degrees of positive integers multiples of four, new improved lower bounds for the achievable number of vertices of multiplicative circulant networks of dimensions 4, 5, and 6 are obtained. Families of circulants reaching the estimates are constructed and their analytic descriptions are found. In this case, an algorithm for the synthesis of large circulant networks is applied, and its parallel version is implemented on supercomputer systems. New circulant networks are found whose orders exceed the orders of the known multiplicative circulants of dimensions 4, 5 and 6 and diameters from 6 to 41.

Keywords: optimization, circulant networks, algorithm of synthesis.

Пусть $s_1, s_2, ..., s_k, n$ – целые числа такие, что $1 \le s_1 < s_2 < ... < s_k < n$. Граф C с множеством вершин $V = \{0,1,...,n-1\}$ и множеством ребер $E = \{(i,j) : i - j \equiv s_l \bmod n, l = \overline{1,k}\}$, называется циркулянтным, числа $S = (s_1, s_2, ..., s_k)$ – образующими, $(n;S)$ – его параметрическим описанием, k – размерностью, n – порядком графа.

Циркулянтные сети (графы) широко изучаются при проектировании и анализе вычислительных систем, в теории графов и дискретной математике, в качестве топологии для мультипроцессорных систем и компьютерных сетей и для других применений, см. обзоры [1,2,3]. Циркулянтные сети вида $C(n;1,t,t^2,...,t^{k-1})$ с образующими, представленными в виде степеней натурального числа $t \ge 2$, называются мультипликативными циркулянтами.

[1] Исследование выполнено в рамках проекта РАН № 0315-2016-0006.

Диаметром графа G называется $d(G)=\max_{i,j\in V} d(i,j)$, где $d(i,j)$ – длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G. Для любых натуральных d и k пусть $M(d,k)$ обозначает максимально возможное (достижимое) натуральное n такое, что существует множество образующих $S=(1,s_2,...,s_k)$, при котором $d(C(n;S))\le d$. Обзоры результатов по оценкам диаметра и достижимого порядка k-мерных, $k\ge 2$, циркулянтных сетей, а также построению их семейств можно найти в [1,2,3].

Приведем часть результатов, касающихся оценок диаметра и достижимого порядка k-мерных, $k\ge 2$, циркулянтных сетей. В работе [4] показано, что

$$M(d,k)\le 1+\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i C_d^{k-i} 2^{k-i},$$

получена нижняя граница диаметра для любых n и k порядка $\frac{1}{2}(k!)^{1/k} n^{1/k}$ и доказана

Теорема 1. Циркулянтные сети вида $C(t^k;1,t,t^2,...,t^{k-1})$, где $t\ge 3$ – нечетное число, имеют диаметр $d=k\left\lfloor \frac{t}{2}\right\rfloor$.

Для размерности $k=2$ решена задача построения двумерных циркулянтов с максимально возможным порядком при любом диаметре d (см. обзор в [1]). В [5,6] найдена функция $M(d,3)$ для любого диаметра d и построены семейства трехмерных циркулянтов с порядком, совпадающим с $M(d,3)$. Для размерности $k=4$ хорошие оценки функции $M(d,4)$ найдены в [7] и улучшены с помощью компьютерного поиска в [8]. Авторы работ [9,10] составили таблицу, содержащую свод самых больших известных циркулянтных сетей, найденных в литературе для $k\le 8$ и $d\le 10$, в том числе результаты для размерностей 2, 3 и 4. В настоящее время таблица рекордных циркулянтных сетей представлена в Интернете [11] и постоянно обновляется.

Изучение мультипликативных циркулянтов, начатое в [4], продолжалось в последующие годы. В работе [12] исследованы свойства мультипликативных циркулянтов вида $C(t^k;1,t,...,t^{k-1})$ с любым четным $t\ge 2$ и получен их диаметр:

$$d(t^k;1,t,t^2,...,t^{k-1})=k\frac{t}{2}-\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor.$$

В [13,14] рассмотрены свойства мультипликативных циркулянтных сетей вида $C(n;1,t,...,t^{k-1})$ с нечетным $t\ge 3$ и $2t^{k-1}<n\le t^k$ и получена формула для верхней оценки диаметра. Показано также, что мультипликативные циркулянтные сети как графы с образующими, представленными в виде степеней целого числа, имеют простые алгоритмы парного [12,13] и трансляционного обменов [12], эффективны относительно трассировки интегральных схем, живучести и отказоустойчивости [13,14]. В [15] доказана

Теорема 2. Пусть d и k – натуральные числа и $d\ge k\ge 3$ и пусть $p=\lfloor (d-k+3)/k\rfloor$. Тогда

$$M(d,k)\ge n=2p\sum_{i=0}^{k-1}(4p)^i=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{k}\right)^k d^k+O(d^{k-1}).$$

Семейство циркулянтных сетей, найденное в [15], в течение длительного времени было наилучшим известным семейством по соотношению порядок/диаметр для всех размерностей $k \ge 3$. Экстремальное семейство из [15] относится к мультипликативным циркулянтным сетям с образующими, представленными в виде степеней четного числа, кратного четырем. В [16] улучшена оценка диаметра графов этого семейства и получено точное значение их диаметра для размерностей $4 \le k \le 7$:

Теорема 3. Пусть $4 \le k \le 7$, $d \ge 2k-3$ и $p = \lfloor (d-k+3)/k \rfloor$. Если $k \ge 5$ или $k = 4$ и $p \ne 1$, то при $n = 2p\sum_{i=0}^{k-1}(4p)^i$ и $S = (1, 4p, \ldots, (4p)^{k-1})$ имеем $d(C(n;S)) = kp+1$.

В [17] получены экспериментально новые нижние оценки достижимого числа вершин мультипликативных циркулянтных сетей размерностей $k=4$ и $k=5$, что позволило в [18] обобщить полученный результат и построить для любых размерностей два новых семейства мультипликативных циркулянтов, графы которых превосходят известные семейства по числу вершин при общих размерностях и диаметрах.

В настоящей работе продолжено исследование нижних оценок экстремальной функции $M(d,k)$ на примере мультипликативных циркулянтов размерностей $4 \le k \le 7$. Для этого рассматривалось экстремальное семейство циркулянтов из [15] с образующими, представленными в виде степеней четного числа, кратного четырем. Исследовался диапазон существования циркулянтов семейства и определялось максимальное значение порядка графа n^*, $n^* \ge n$, при котором значения образующих и диаметров совпадают с найденными в [15] (см. значения образующих и диаметра из теоремы 3). В табл. 1 приведены значения найденных максимально возможных порядков (обозначены через n^*) графов размерностей 4, 5 и 6. Здесь d – диаметр найденных графов, n^* – их порядок, параметр $t = 4p$ порождает соответствующие множества образующих графа. Для сравнения в таблицу включены соответствующие значения порядков графов семейства из [15] (обозначены курсивом). Новые сети найдены с использованием компьютерного поиска, при этом максимальное увеличение порядков по сравнению с графами из [15] составляет t^2+t^3 при $k=4$, t^4 при $k=5,6$ (при сохранении значений образующих и диаметров).

На основе анализа данных из табл. 1 найдены аналитические описания семейств полученных графов размерностей 4, 5 и 6. Их порядки и диаметры оказались представимы в виде полиномов от t, результаты приведены в табл. 2. Существование найденных семейств графов проверено с помощью специально разработанной компьютерной программы для значений $n < 34 \cdot 10^6$ при $4 \le k \le 6$. Для этого использовалась параллельная программа с библиотекой OpenMP. Другой особенностью полученных семейств является тот факт, что порядки найденных графов претендуют на максимальность для исследуемых типов образующих, как было экспериментально показано при значениях диаметров $d \le 30$ для $k=4$. Отметим, что в последней строке табл. 2 дано описание целого множества существующих семейств мультипликативных циркулянтных графов размерности 4.

При $i = 1$ и t, кратном четырем, оно совпадает с описанием первого семейства таблицы 2.

Таблица 1

Новые мультипликативные циркулянты размерностей 4, 5 и 6

$k=4$			$k=5$						$k=6$		
d	n^*	t	d	n^*	t	d	n^*	t	d	n^*	t
5	298 *170*	4	6	938,1002 *682*	4	36	9538550 *8923894*	28	7	2986, 3754, 3818 *2730*	4
9	2916 *2340*	8	11	22820 *18724*	8	41	18366992 *17318416*	32	13	153892 *149796*	8
13	13182 *11310*	12	16	156462 *135726*	12	46	-	36	19	1649454 *1628718*	12
17	39304 *34952*	16	21	624776 *559240*	16	51	-	40	25	9013384 *8947848*	16
21	92610 *84210*	20	26	1844210 *1684210*	20	56	-	44	31	33844210 *33684210*	20
25	187500 *173100*	24	31	4486188 *4154412*	24	61	-	48	37	-	24

Таблица 2

Аналитические описания новых семейств циркулянтов размерностей 4, 5, 6

k	n^*	d	t
4	$(t/2)\cdot\sum_{i=0}^{3} t^i + t^2 + t^3$	$t+1$	4, 8, 12, 16, 20, 24 $S=(1,t,t^2,t^3)$
5	$(t/2)\cdot\sum_{i=0}^{4} t^i + t^4$	$5t/4+1$	4,8,12,16,20,24,28,32 $S=(1,t,t^2,t^3,t^4)$
6	$(t/2)\cdot\sum_{i=0}^{5} t^i + t^4$	$3t/2+1$	4, 8, 12, 16, 20 $S=(1,t,t^2,t^3,t^4,t^5)$
4	$n_i = (t/2)\cdot(1+3t+(4i-1)t^2+t^3)$, $i \ge 0$	$t+i$	$S=(1,t,t^2,t^3)$, $t \ge 6$ – четное число

Отметим, что для $k = 5{,}6$ и $t = 4$ дополнительно существуют следующие графы: для $k = 5$ - граф с числом вершин, равным $n + t^3 + t^4$, для $k = 6$ – графы с порядками, равными $n + t^5$ и $n + t^3 + t^5$.

Доказательства существования полученных в аналитическом виде семейств из табл. 2 при любых значениях t, кратных четырем, и максимальности их порядков при заданных диаметрах и образующих, являются предметом дальнейшей работы. Также будет исследована возможность расширения диапазонов порядков графов из [15] размерности 7. Полученные в табл. 1 значения порядков графов размерности 6 и диаметров $d \ge 13$ задают новую улучшенную нижнюю оценку функции $M(d,6)$.

Библиографический список

1. Монахова Э.А. Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 3. С. 92-115.

2. Monakhova E.A. A Survey on Undirected Circulant Graphs // Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 4(1) (2012), 1250002 (30 pages).

3. Perez-Roses H. Algebraic and Computer-Based Methods in the Undirected Degree/Diameter Problem – A Bief Survey// Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 2(2) (2014), 166–190.

4. Wong C.K. and Don Coppersmith, A combinatorial problem related to multimodule memory organizations// J. Assoc. Comput. Mach., 21 (1974), 392–402.

5. Monakhova E. Optimal Triple Loop Networks with Given Transmission Delay: Topological Design and Routing// Inter. Network Optimization Conference, (INOC'2003), Evry/Paris, France, (2003), 410–415.

6. Dougherty R., Faber V., The degree-diameter problem for several varieties of Cayley Graphs, 1: The Abelian Case// SIAM J. Discrete Math., 17(3) (2004), 478–519.

7. Монахова Э.А. Оптимизация циркулянтных сетей связи размерности четыре // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15, N. 3. С. 58-64.

8. Lewis R., The degree-diameter problem for circulant graphs of degree 8 and 9// arXiv:1404.3948v1, (2014).

9. Feria-Puron R., Ryan J., Perez-Roses H., Searching for Large Multi-Loop Networks// Elec. Notes Disc. Math., 46 (2014), 233–240.

10. Feria-Puron R., Perez-Roses H., Ryan J., Searching for Large Circulant Graphs// arXiv:1503.07357v1 [math.CO] (25 Mar 2015), P. 31.

11. The Degree/Diameter Problem For Circulant Graphs http://combinatoricswiki.org/wiki/The_Degree_Diameter_Problem_for_Circulant_ Graphs.

12. Stojmenovic I. Multiplicative circulant networks. Topological properties and communication algorithms // Discrete Applied Math. 77, (1997). P. 281–305.

13. Parhami B., Chordal Rings Based on Symmetric Odd-Radix Number Systems // Proc. of Inter. Conf. on Communications in Computing (Las Vegas, NV, June 27-30). Los Alamitos: IEEE Press, (2005), 196–199.

14. Parhami B. A Class of Odd-Radix Chordal Ring Networks // The CS'J Journal on Computer Science and Engineering. 4(2) (2006), 1–9.

15. Chen S., and Jia X.-D., Undirected loop networks// Networks, 23 (1993), 257–260.

16. Monakhova E.A., On an Extremal Family of Circulant Networks// Journal of Applied and Industrial Mathematics, 5 (4) (2011), 1–7.

17. Монахова Э.А., Монахов О.Г. Оптимизация семейств циркулянтных сетей // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: сборник статей XVII Международной научно-технической конференции / под ред. В.И. Горбаченко, В.В. Дрождина. Пенза: ПДЗ, 2017. С. 32-39.

18. Монахова Э.А. Новые семейства мультипликативных циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. N. 3 (2018). С. 90-98.

Монахова Эмилия Анатольевна
Институт вычислительной математики и математической географии СО РАН,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: emilia@rav.sscc.ru

Monakhova E.A.
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
Novosibirsk, Russia

Монахов Олег Геннадьевич
Институт вычислительной
математики и математической
географии СО РАН,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: monakhov@rav.sscc.ru

Monakhov O.G.
Institute of Computational
Mathematics and Mathematical
Geophysics,
Novosibirsk, Russia