

УДК 681.324:519.17

О НЕКОТОРЫХ СТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ГИПЕРЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ¹

О.Г. Монахов, Э.А. Монахова

ON SOME STRUCTURAL CHARACTERISTICS OF HYPERCIRCULANT NETWORKS

O.G. Monakhov, E.A. Monakhova

Аннотация. В работе исследуется решение оптимизационной проблемы построения оптимальных по диаметру регулярных сетей (графов). Регулярные сети обеспечивают практический интерес как графо-теоретические модели надежных сетей связи параллельных суперкомпьютерных систем, как основа структуры в модели малого мира, в нейронных и оптических сетях. Исследуется новый класс параметрически описываемых регулярных сетей – гиперциркулянтные сети (графы). Разработан подход, использующий алгоритм дифференциальной эволюции для автоматического порождения оптимальных параметрических описаний гиперциркулянтных сетей. Проведен сравнительный анализ структурных характеристик гиперциркулянтных, тороидальных и циркулянтных сетей. Показано преимущество гиперциркулянтных сетей при соизмеримых затратах на число узлов и число связей системы по таким структурным характеристикам, как диаметр, средний диаметр, пропускная способность и надежность сети.

Ключевые слова: оптимизация, гиперциркулянтные сети, алгоритм синтеза.

Abstract. In this paper, we investigate the solution of the optimization problem of constructing optimal regular networks (graphs) with respect to diameter. Regular networks provide practical interest as graphical and theoretical models of reliable networks of parallel supercomputer systems, as the basis of the structure in the model of the small world, in neural and optical networks. A new class of parametrically described regular hypercirculant networks (graphs) is investigated. An approach is developed that uses the differential evolution algorithm to automatically generate optimal parametric descriptions of hypercirculant networks. A comparative analysis of the structural characteristics of hypercirculant, toroidal and circulant networks was carried out. The advantage of hypercirculant networks is shown at commensurate costs on the number of nodes and the number of system links by such structural characteristics as diameter, average diameter, throughput and reliability of the network.

Keywords: optimization, hypercirculant networks, algorithm of synthesis.

Пусть s_1, s_2, \dots, s_n, N – целые числа такие, что $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n < N$ и пусть $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Неориентированный граф $C(N; S)$ с множествами вершин $V = \{0, 1, \dots, N-1\}$ и ребер $E = \{(i, j) : i - j \equiv s_m \pmod{N}, m = \overline{1, n}\}$ называется *циркулянтным*, числа из множества S – образующими, n – размерностью, N – порядком графа. В n -мерном циркулянте степень вершин $P = 2n$, за исключением тех случаев, когда образующая представляет собой циклическую подгруппу порядка два.

Циркулянтные графы (сети) являются графами Кэли абелевых групп и находят широкое применение при построении и анализе топологий сетей и мультипроцессорных систем, в теории кодирования, распределенных вычислениях, моделировании химических реакций [1-7].

¹ Исследование выполнено в рамках научного проекта РАН № 0315-2016-0006.

Диаметром графа G называется $d(G) = \max_{i,j \in V} d(i,j)$ где $d(i,j)$ – длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G . Средним диаметром графа порядка N называется $d_{av} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j \in V, i \neq j} d(i,j)$.

Рассмотрим некоторое обобщение циркулянтных сетей – класс гиперциркулянтных сетей [8]. Пусть множество вершин $V = \{0,1,\dots,N-1\}$ графа HC разбито на $k \leq N$ классов эквивалентности: $V_i = \{a \mid a \in V, a \equiv i \pmod{k}\}$, где $i = \overline{0, k-1}$ и k – делитель N . Пусть $L = \{l_{im}\}$, $1 \leq l_{im} < N$, $i = \overline{0, k-1}$, $m = \overline{1, v}$, – множество положительных целых чисел, которое назовем множеством образующих (отметок ребер) графа HC , а v – его степень. Определим множество ребер графа HC : $E = \{(a,b) : a \equiv i \pmod{k}, b - a \equiv l_{im} \pmod{N}, l_{im} \in L, m = \overline{1, v}\}$. Обозначим такую гиперциркулянтную сеть как $HC(N, v, L, k)$ или $HC(N, v, \{l_{im}\}, k)$. Следует отметить, для каждого ребра с отметкой l из множества L существует ребро с отметкой $l^* = N - l$, и если удалить из множества L одно ребро из каждой пары ребер, связанных данным соотношением, то получим множество L^* – минимально необходимое множество отметок. Например, множества $L = \{1,49,19,31,14,36; 1,49,19,31,22,28\}$ и $L^* = \{1,19,14; 1,19,22\}$ для гиперциркулянтной сети $HC(50,6,L,2)$. Заметим, что класс гиперциркулянтных сетей является подклассом более общего класса $R_s(N, v)$ графов [1, 9]. Отметим также, что, в отличие от циркулянтных сетей, где каждая вершина имеет ребра с одинаковым множеством образующих, в гиперциркулянтных сетях у разных классов вершин может быть разный набор образующих.

Рассмотрим предлагаемый подход к синтезу оптимальных гиперциркулянтных сетей, то есть к построению сетей с минимальным диаметром (средним диаметром). Снижение степени регулярности сети (при $k > 1$) позволяет уменьшить ее диаметр (средний диаметр). Покажем это в данной работе экспериментально, следующим образом. Будем синтезировать оптимальные гиперциркулянтные сети на основе оптимальных циркулянтных сетей с меньшей степенью вершин. Для построения оптимальной гиперциркулянтной сети $HC(N, v, \{l_{im}\}, k)$ будем использовать циркулянтную сеть $C(N; S)$ из известных оптимальных семейств [2, 10] циркулянтных сетей размерности n , с требуемым числом вершин N , с меньшей степенью вершин $p = 2n < v$. При этом множество образующих S циркулянтной сети будет использовано как подмножество образующих гиперциркулянтной сети (для всех классов вершин – одинаковое), а недостающие $v - p$ образующих (для каждого класса вершин – свои) будут синтезироваться с помощью алгоритма дифференциальной эволюции (ДЕ) [11], описанного далее, осуществляющего минимизацию диаметра (среднего диаметра) сети. Заметим, что возможна также оптимизация части описания, полученного от циркулянтных сетей.

Основными методами, используемыми для построения регулярных сетей с минимальным диаметром и/или минимальным средним расстоянием являются локальный поиск, а также переборные и эвристические алгоритмы. Предлагаемый подход основан на задании начальных темплейтов в виде циркулянтных графов

меньшей размерности и использует эволюционные вычисления на основе алгоритма дифференциальной эволюции для синтеза оптимальных регулярных сетей. Основная идея алгоритма состоит в эволюционных преобразованиях над множествами описаний графов, основанных на естественной селекции – выживает «сильнейший». В нашем случае этими особями являются графы, имеющие наименьший средний диаметр. Функция пригодности FF оценивает в данном случае средний диаметр полученных графов с заданными степенью, множеством образующих и порядком. Особи представлены векторами действительных чисел - хромосомами (которые преобразуются в целые числа для описаний образующих), при этом подмножество образующих, полученных от исходного (оптимального) циркулянтного графа остается неизменным, а поиск осуществляется только для недостающих до заданной степени образующих. Алгоритм начинается с генерации начальной популяции. Все особи в этой популяции создаются случайно, затем отбираются наилучшие особи и запоминаются. Для создания популяции следующего поколения (следующей итерации), новые особи формируются с помощью операторов алгоритма дифференциальной эволюции - селекции (отбора), мутации, кроссовера и добавления новых элементов. Определим начальную популяцию, состоящую из M произвольных случайных векторов вещественных чисел заданной длины l - число образующих. Затем применяем генетические операторы мутации, кроссовера и отбора к этой популяции.

Инициализация. На этом этапе M l -мерных решений (векторов) генерируются случайным образом. Возьмем $x_{i,G}, i=1,2,\dots,M$. Эти начальные решения принимаются таким образом, что они охватывают все пространство поиска. Для всех решений вычисляются значения целевой функции.

Мутация. Принимая каждый вектор $x_{i,G}$ (один за другим) в качестве целевого вектора, выбираются три случайных вектора $x_{r_1,G}, x_{r_2,G}, x_{r_3,G}$, и эти случайные векторы будут такими, чтобы $i \neq r_1 \neq r_2 \neq r_3$. Таким образом, первоначальная популяция содержит не менее четырех особей. С помощью целевых векторов и этих случайных векторов формируется новый вектор, известный как мутантный вектор. Мутантный вектор формируется таким образом, что взвешенная разница случайных векторов добавляется к третьему вектору. Математическое уравнение мутантного вектора описывается следующим образом:

$$v_{i,G+1} = x_{r_1,G} + F(x_{r_2,G} - x_{r_3,G}),$$

здесь $v_{i,G+1}$ будет мутантным вектором, $x_{r_1,G}$ называется базовым вектором, вес F называется коэффициентом масштабирования или множителем и лежит в пределах от 0 до 2. F управляет усилением дифференциального изменения $(x_{r_2,G} - x_{r_3,G})$.

Кроссовер. Вектор, сформированный после операции кроссовера с целевым вектором и мутантным вектором, называется пробный вектор. Пусть $u_{j,i,G+1} = (u_{1,i,G+1}, u_{2,i,G+1}, \dots, u_{D,i,G+1})$ – пробный вектор, тогда он порождается следующим образом:

$$u_{j,i,G+1} = \begin{cases} v_{j,i,G+1} & \text{если } Rand \leq C_r, \forall j = j_{rand} \\ x_{j,i,G} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь появляется новый параметр C_r , называемый вероятностью кроссовера или константой кроссовера, и его значение лежит между 0 и 1.

Селекция. Поскольку этот алгоритм основан на принципе Дарвина «Выживание наиболее приспособленных», поэтому более подходящее решение будет сохранено в следующем поколении $G+1$, а плохое решение будет отброшено. Для этого будет проведено сравнение между пробным вектором и целевым вектором, если целевая функция имеет форму минимизации, то вектор, для которого целевая функция минимальна, будет выбираться для следующего поколения

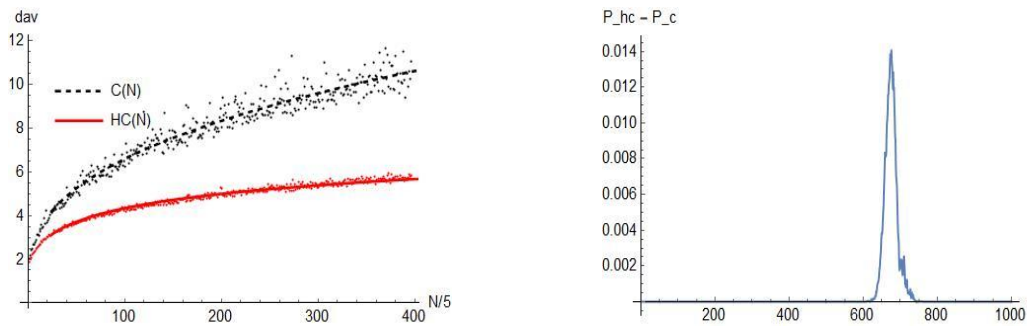
$$x_{i,G+1} = \begin{cases} u_{i,G+1} & \text{если } f(u_{i,G+1}) \leq f(x_{i,G}) \\ x_{i,G} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Этот цикл мутации, кроссовера и отбора будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнут критерий остановки. Алгоритм завершается при обнаружении вектора с $FF = 0$ или после заданного числа итераций (поколений).

Проведем сравнительный анализ гиперциркулянтных и циркулянтных сетей по такой структурной характеристике как средний диаметр, которая характеризует среднюю задержку при обменах в сети. В экспериментах были сгенерированы случайные трехмерные гиперциркулянтные и циркулянтные сети, при этом одна из образующих принимала значение равное 1, число вершин N изменялось от 25 до 2000, для каждого значения N кратного 5 генерировалось 30 сетей. Результаты полученной зависимости среднего диаметра d_{av} от числа вершин N показаны на рисунке слева.

Полученные данные для гиперциркулянтных сетей показывают логарифмическую зависимость среднего диаметра d_{av} от числа вершин N (вида $d_{av} \approx \log_2 4N$ – сплошная линия), циркулянтные сети показывают степенную зависимость (вида $d_{av} \approx N^{0.38}$ – пунктирная линия).

Сравним показатели надежности и живучести гиперциркулянтных и циркулянтных сетей, а именно, получим вероятности образования связных подсистем заданного ранга (числа вершин) r при заданных вероятностях отказа вершин p_v и ребер p_e . Методом статистического моделирования были получены вероятности образования связных подсистем заданного ранга для трехмерных гиперциркулянтных P_{hc} и циркулянтных P_c сетей. На рисунке справа показана разность вероятностей образования подсистем заданного ранга $P_{hc} - P_c$ гиперциркулянтных и циркулянтных сетей в зависимости от ранга подсистемы при заданных вероятностях отказа вершин $p_v = 0,7$ и ребер $p_e = 0,7$ для сетей с числом вершин 1000. Видно, что гиперциркулянтные сети имеют более высокую вероятность связности при отказах.



Разность вероятностей образования подсистем заданного ранга (справа) и зависимости величины среднего диаметра от числа вершин (слева) для гиперциркулянтов и циркулянтов

Алгоритм дифференциальной эволюции был применен для поиска оптимальных гиперциркулянтов. Предельное число итераций равно 300, размер популяции равен 100, $F = 0.15$, $C_r = 0.7$, указанные параметры выбирались экспериментальным путем. В таблице проведено сравнение полученных топологий циркулянтов, гиперциркулянтов и тороидальных структур по диаметру d , среднему диаметру d_{av} и пропускной способности BW . Порядки циркулянтов и гиперциркулянтов в таблице являются равными числу вершин соответствующих торов.

Улучшение рассмотренных структурных показателей у гиперциркулянтных сетей указанной размерности по сравнению с торами и циркулянтами позволяет уменьшить задержки при передаче информации, сократить время исполнения заданий, увеличить показатели надежности и живучести системы, и, соответственно, при соизмеримых затратах на число узлов и число связей получить большую производительность и экономическую эффективность.

Сравнение топологий 3D-торов, циркулянтов и гиперциркулянтов размерности три

3D-torus	N	d	d_{av}	BW
4x4x4	64	6	3	32
8x8x8	512	12	6	128
10x10x10	1000	15	7.5	200
16x16x16	4096	24	12	512
Circulants $C(N; s_1, s_2, s_3)$	N	d	d_{av}	BW
1, 23, 28	64	4	2.60	52
1, 78, 96	512	8	5.41	218
1, 353, 436	1000	11	6.8	352
1, 757, 1329	4096	18	10.96	888
H Circulants $HC(N, 6, \{l_{im}\}, 2)$	N	d	d_{av}	BW
1, 5, 26; 1, 5, 8	64	3	2.4	46
1, 101, 182; 1, 101, 86	512	6	4.17	220
1, 153, 168; 1, 153, 266	1000	7	4.95	428
1, 1441, 600; 1, 1442, 522	4096	10	7.14	986

Библиографический список

1. Монахов О.Г., Монахова Э.А. Параллельные системы с распределенной памятью: структуры и организация взаимодействий. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 242 с.
2. Монахова Э.А. Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. №3(13). С. 92-115.
3. Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D.F. Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comput. 1995. V. 24. P. 2-10.
4. Hwang F.K. A survey on multi-loop networks // Theoretical Computer Science. 2003. V. 299. P. 107-121.
5. Martinez C., Beivide R., and Gabidulin E. M. Perfect codes from Cayley graphs over Lipschitz integers // IEEE Transactions on Information Theory. 2009. V. 55, №8. P. 3552-3562.
6. Нестеренко Б.Б., Новотарский М.А. Клеточные нейронные сети на циркулянтных графах // Искусственный интеллект. 2009. No3. С.132-138.
7. Muga II F.P., Saldana and Yu W.E.S. Building Graph-Based Symmetric Cluster // NECTEC Technical Journal. 2001. V. 11, №9. P. 195-199.
8. Монахов О.Г., Монахова Э. А. Улучшение характеристик класса регулярных сетей с помощью алгоритма эволюционного синтеза // Наука и образование. №10, 2014. С. 273-283, DOI: 10.7463/1014.0728878.
9. Monakhov O.G., Monakhova E. A., A Class of Parametric Regular Networks for Multicomputer Architectures. Intern. Scientific Journal "Computing and Systems", Vol.4, No.2, 2000, p. 85-93.
10. Монахова Э.А., Монахов О.Г. Эволюционный синтез семейств оптимальных двумерных циркулянтных сетей // Вестник СибГУТИ. 2014. № 3. С. 41-49.
11. Storn, R., and Price, K., Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // J. Global Optimization. 1997. vol. 11, N 4, P. 341 -359.

Монахов Олег Геннадьевич

Институт вычислительной
математики и математической
географии СО РАН,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: monakhov@rav.sccc.ru

Монахова Эмилия Анатольевна

Институт вычислительной
математики и математической
географии СО РАН,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: emilia@rav.sccc.ru

Monakhov O.G.

Institute of Computational
Mathematics and Mathematical
Geophysics,
Novosibirsk, Russia

Monakhova E.A.

Institute of Computational
Mathematics and Mathematical
Geophysics,
Novosibirsk, Russia