Яремко О.Э., Яремко Н.Н. Вектор-функция матричного аргумента для задач взаимосвязанного тепломассопереноса. // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XVIII Междунар. научно-техн. конф. – Пенза: ПДЗ, 2018. – С. 47-50.

УДК 517.44

ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ МАТРИЧНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧ ВЗАИМОСВЯЗАННОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

О.Э. Яремко, Н.Н. Яремко

VECTOR-FUNCTION OF THE MATRIX ARGUMENT FOR THE HEAT AND MASS TRANSFER PROBLEMS

O.E. Yaremko, N.N. Yaremko

Аннотация. Определяется понятие вектор-функции матричного аргумента. Приводится матричный аналог формулы Пуассона для уравнения теплопроводности. Представлен алгоритм решения взаимосвязанных задач тепломассопереноса методом фундаментальных решений.

Ключевые слова: вектор-функция, матричный аргумент, метод фундаментальных решений, задача тепломассопереноса.

Abstract. The vector-function of the matrix argument concept is defined. The Poisson formula matrix analogue for the heat equation is given. An algorithm for solving the Heat and Mass Transfer interconnected problems by the method of fundamental solutions is presented.

Keywords: vector-function, matrix argument, method of fundamental solutions, heat and mass transfer problem.

Пусть матрица **A** может быть приведена к диагональному виду, то есть мы можем найти матрицу **P** и диагональную матрицу **D** такие, что $\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^{-1}$. Мы получаем, что $f(\mathbf{A})$ определяется выражением

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{P}\begin{bmatrix} f(d_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & f(d_n) \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}, \tag{1}$$

где $d_1,...,d_n$ обозначает собственные значения матрицы **A**, матрица **P** образована из столбцов, которые служат собственными векторами матрицы **A**.

Алгоритм вычисления функции от матрицы:

1) найти собственные значения **A** – стандартный алгоритм (например, в maxima);

2) найти собственные векторы **A** – стандартный алгоритм (например, в maxima);

3) найти функцию матрицы по формуле (1).

Определение. Пусть на действительной полуоси задана вектор–функция

$$\mathbf{f}(x)=\left(f_1(x),...,f_n(x)\right)',$$

тогда вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{A}x)$ определяется формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}x)=\sum_{k=1}^{n} f_i(\mathbf{A}x)\mathbf{e}_i,$$

где $f_i(\mathbf{A}x)-$ функция от матрицы в смысле определения [1], $e_i -$ единичный вектор с единичной $i-$ой координатой.

В качестве применения нового понятия рассмотрим математическую модель тепломассопереноса в неограниченной среде, приводящую к задаче Коши для системы уравнений параболического типа

$$\mathbf{u}'_t = \mathbf{A}\mathbf{u}''_{xx}, 0 < t \le T, -\infty < x < \infty;$$
$$\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{f}(x), -\infty < x < \infty,$$

здесь $\mathbf{A}-$ матрица коэффициентов, диагональные элементы которой характеризуют основные эффекты переноса, а вне диагональные – перекрестные.

Считая собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ положительными и различными,по аналогии со скалярным случаем,доказывается формула для решения задачи Коши

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{\mathbf{A}^{-1}}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\mathbf{A}^{-1}\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\mathbf{f}(\xi)d\xi. \qquad (2)$$

Корень квадратный из матрицы понимается в смысле формулы (1). Анализ показывает, что формула справедлива и в случае различных комплексных собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ с положительной действительной частью. Например, для матрицы размера 2×2 на основании формулы для матричной экспоненты и матричного квадратного корня,векторная формула Пуассона (2) принимает вид, удобный в инженерных вычислениях

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{1}{\sqrt{a+d+2\sqrt{\Delta}}} \begin{pmatrix} a+\sqrt{\Delta} & b \\ c & d+\sqrt{\Delta} \end{pmatrix} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\left(\cos\left(\beta\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) + \frac{\alpha}{\beta}\sin\left(\beta\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\right)\mathbf{E}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\beta}\sin\left(\beta\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\mathbf{A}^{-2}\right)\mathbf{f}(\xi)d\xi,$$

где

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}, \Delta = ad - bc;$$

$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \mathrm{Re}\,\alpha > 0$ – собственные числа матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

Метод фундаментальных решений для взаимосвязанной задачи тепломассопереноса основан на формуле (2) и состоит в следующем: пусть для каждой из координат вектор-функции

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))'$$

найдена аппроксимация взвешенной суммой гауссиан

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{w_{ij}}{\sqrt{\tau_{ij}}} \exp\left(-\frac{(x-c_{ij})^2}{4\tau_{ij}}\right), \qquad (3)$$

где $w_{ij}, a_{ij}, 4\tau_{ij} -$ веса, центры и квадрат ширины гауссиана, соответственно. Тогда решение задачи Коши имеет вид

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{N} w_{ij}\sqrt{\left(At+E\tau_{ij}\right)^{-1}}\exp\left(-\left(At+E\tau_{ij}\right)^{-1}\frac{\left(x-c_{ij}\right)^{2}}{4}\right)e_i \quad (4)$$

Для доказательства заметим, что каждое из слагаемых в формуле (4) по построению есть точное решение системы уравнений тепломассопереноса, а начальные условия удовлетворяются приближенно на основании (3).

Библиографический список

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.

Яремко Олег Эмануилович
Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: yaremki@yandex.ru

Yaremko O.E.
Penza State University,
Penza, Russia

Яремко Наталья Николаевна
Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Yaremko N.N.
Penza State University,
Penza, Russia